Кыргыз республикасынын билим берүү жана

илим министрлиги

Жалал-Абад мамлекеттик университети

К.С. Алыбаев, Ж.А. Аванова, М.Р. Нарбаев

Т.К. Нарымбетов

МАТЕМАТИКАЛЫК АНАЛИЗ БОЮНЧА ЛЕКЦИЯЛАР ЖЫЙНАГЫ

(1-бөлүк)

Жалал-Абад – 2013

Китепте колдонулган айрым түшүнүктөр жана белгилүүлөр

1. Латын жана грек алфавитинин тамгалары.

2. Математикалык логиканын айрым белгилери

$"A \wedge B"$, A жана B;

$"A \vee B"$, A же B;

$"A \Rightarrow B"$, эгерде A болсо, анда B болот (A дан B келип чыгат);

$"A \Leftrightarrow B"$, A жана B тең күчтө (A дан B жана B дан A келип чыгат);

$"\forall \varepsilon > 0"$, каалаган ε оң саны;

$"\exists \delta > 0"$, кандайдыр бир δ оң саны табылат;

$":"$ үчүн, $"A : B"$, A үчүн B орун алат (болот);

3. Символодорду колдонуу менен татаал сүйлөмдөрдү жазууда жөнөкөй сүйлөмдөрдү кашааларга алабыз.

М и с а л ы. Каалагандай $\varepsilon > 0$ санын албайлы кандайдыр бир $\delta > 0$ саны жашап жана $|x - x_0| < \delta$ барабарсыздыгын канааттандыруучу x тер үчүн $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылат.

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0) \wedge (|x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

1. Көптүктөр

1.1. Көптүк түшүнүгү

Математика илиминде аныктоо берилбеген түшүнүктөр бар. Мисалы: чекит, түз сызык, тегиздик, мейкиндик ж.б. Көптүк да мына ушундай түшүнүктөргө кирет. «Жыйынды», «группа», «түр», «класс» ж.б. сөздөр көптүк деген сөзгө мааниси боюнча жакын болуп эсептелет.

Тактык үчүн төмөндөгүдөй аныктоону кабыл алалы.

А н ы к т о о. Кандайдыр бир обьектилердин жыйындысын көптүк, ал эми обьектилерди анын элементтери деп атайлы.

Көптүктү латын алфавитинин чоң, $(A, B, C, D, X, Y, Z,...)$, ал эми элементтерин кичине $(a, b, c, d, x, y, z,...)$ тамгалары аркылуу белгилейли. Көптүктү жана элементтерин мындай белгилүү шарттуу түрдө гана, жалпысынан каалагандай белгилөөгө болот.

A көптүгү $a_1, a_2,..., a_n,...$ элементтери менен берилсе, бул көптүктү

$$A = \{a_1, a_2,..., a_n,...\}$$

түрдө белгилүү кабыл алынган.

«$a \in A$» – жазуу a элементи A көптүгүнө таандык деп окулат, мында «$\in$»– таандык белгиси.

«$a \notin A$» («$a \overline{\in} A$») – жазуу a элементи A көптүгүнө таандык эмес дегенди туюнтат.

B көптүгүнүн баардык x элементтери кандайдыр бир P касиетке ээ болсо, анда бул көптүк

$$B = \{x, P(x)\}$$

түрдө белгиленет.

М и с а л. $B = \{2n, n \in N$ – натуралдык сандардын көптүгү $\}$ – жуп натуралдык сандардын көптүгү.

1.2. Көптүктүн түрлөрү

Көптүк элементтеринин саны боюнча чектүү же чексиз болуп бөлүнөт.

А н ы к т о о. Көптүктүн элементтеринин саны чектүү болсо, анда ал чектүү тескерисинче болгондо чексиз деп аталат.

М и с а л 1. $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ – чектүү;

$B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,...\}$ – чексиз.

А н ы к т о о. Бир дагы (таптакыр) элементи болбогон көптүк бош көптүк деп аталат, $\varnothing$ – символу аркылуу белгиленет.

М и с а л 2. $x^2+1=0$, $x \in R$ – чыныгы сандардын көптүгү, теңдемеси берилсин.

Бул теңдеменин чыныгы тамырларынын көптүгүн X дейли, $X \subset R$. Теңдеменин бир дагы чыныгы тамыры жашабагандыктан $X=\varnothing$ болот.

Жогорудагы аныктоолордон төмөндөгү сүйлөмдүн тууралыгы келип чыгат.

Эгерде көптүк чектүү (чексиз) болсо, анда ал чексиз (чектүү) боло албайт.

Мисал 2 ге кайрылалы жана теңдемени C – комплекстик сандардын көп-түгүндө карайлы. Бул учурда теңдеменин тамырларынын көптүгүн B десек, ал $\varnothing$ болбойт, б.а. $B=\{i,-i\}$, $i=\sqrt{-1}$ болот. Бул мисалдын негизинде төмөндөгүдөй жыйынтык чыгарууга болот.

Ж ы й ы н т ы к. Изилденип жаткан маселени кандай көптүктө карап жатканыбызга карата анын чечимдеринин көптүгү да ар кандай болушу мүмкүн.

1.3. Эквиваленттүү, санаттык жана санаттык эмес көптүктөр

A жана B көптүктөрү берилсин. Бул көптүктөрдү элементтердин саны боюнча салыштыралы. Төмөндөгүдөй аныктоону кабыл алалы.

А н ы к т о о. Кандайдыр бир эрежелердин жардамында A жана B көптүктөрүнүн элементтеринин ортосунда өз ара бир маанилүү тиешелештик орнотулса, анда A жана B көптүктөрү эквиваленттүү деп аталат (элементтердин саны бирдей деген мааниде).

Эквиваленттүүлүк $A \sim B$ түрдө белгиленет.

Эгерде көптүктөр чектүү болсо, анда бул көптүктөрдүн ортосунда эквиваленттүүлүк элементтеринин саны боюнча орнотулат. Чексиз көптүктөрдүн ортосунда эквиваленттүүлүктү орнотуу бир топ татаал. Айрым чексиз көптүктөр үчүн эквиваленттүүлүк катышты орнотуу маселесин карайлы.

$$N=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$$

натуралдык сандардын көптүгү берилсин.

А н ы к т о о. N көптүктүгү эквиваленттүү болгон көптүктү санаттык көптүк деп атайбыз.

Демек, санаттык көптүктүн элементтерин номерлеп чыгууга болот.

М и с а л. $A=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\}$, $B=\{\sin 1,\sin 2,\sin 3,\ldots,\sin n,\ldots\}$ санаттык көптүктөр болот.

Чексиз көптүктөрдү кубаттулук деген түшүнүктү киргизүү жолу менен да салыштырууга болот. Кубаттуулук түшүнүгү көптүктөрдү өз ара эквиваленттүү класстарга бөлөт. Мына ошондой класстардын бири санаттык көптүктөр болуп эсептелет.

Санаттык эмес көптүктөрдү санатсыз деп атоо кабыл алынган. Мисалы, чыныгы сандардын көптүгү санатсыз.

Чексиз көптүктөр чектүү көптүктөр ээ болбогон касиеттерге ээ болушат. Маселен чексиз көптүктөрдү көптүк көзүнүн бөлүкчөсүнө барабар болушу мүмкүн.

1.4. Барабар көптүктөр. Бөлүкчө көптүк

Кандайдыр бир A жана B көптүктөрү берилсин.

А н ы к т о о. A жана B көптүктөрү бирдей элементтерден турса, анда алар барабар деп аталышат жана $A = B$ түрдө белгиленет.

$A \neq B$ белгилөөсү көптүктөр барабар эмес дегенди туюнтат.

А н ы к т о о. B көптүгүнүн каалаган элементи A көптүгүнүн да элементи болсо, анда B көптүгү A көптүгүнүн бөлүкчө көптүгү деп аталат.

$B \subseteq A$ түрүндө белгиленет. «$\subseteq$» – камтылуу белгиси.

Аныктоо. $B \subseteq A$ жана $B \neq A$ болсо, анда B көптүгү A көптүгүнүн өздүк бөлүкчө көптүгү деп аталат, $B \subset A$ түрдө белгиленет.

М и с а л д а р. 1. $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$, $B = \{a_1, a_3, a_5, a_2, a_6, a_4, a_7\}$ берилсин. $A = B$ жана $B \subseteq A$.

2. $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$, $C = \{a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3\}$. $A \neq C$.

3. $A = \{1,2,3,4,5,6,7,...\}$, $B = \{1,3,5,7,...\}$. $B \subset A$

1.5. Көптүктөрдүн үстүндө амалдар

A жана B көптүктөрү берилсин.

А н ы к т о о. A көптүгүнүн элементтеринен жана B көптүгүнүн A га таандык болбогон элементтеринен түзүлгөн көптүк A жана B көптүктөрүнүн биригүүсү деп аталат.

Биригүү $A \cup B$ түрдө белгиленет.

А н ы к т о о. A жана B көптүктөрүнө таандык болгон элементтерден түзүлгөн көптүк A жана B нын кесилиши деп аталат.

А н ы к т о о. A көптүгүнүн B көптүгүнө таандык болгон элементтерди алып таштоо аркылуу C көптүгү түзүлсүн, анда C көптүгү A жана B көптүктөрүнүн айырмасы деп аталат. $C = A \setminus B$ деп белгиленет.

А н ы к т о о. 1. $B \subset A$ 2. $A \setminus B = D$. Бул шарттар аткарылганда D көптүгү B көптүгүнүн A көптүгүнө чейинки толуктоочу көптүгү деп аталат $C_A B$ же CB түрдө белгиленет.

М и с а л д а р. 1. $A = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4\}$, $B = \{a_1, b_1, b_2, c_1, c_2\}$.

$C = A \cup B = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2\}$;

$C = A \cap B = \{a_1, b_1, b_2\}$;

$C = A \setminus B = \{a_2, a_3, b_3, b_4\}$;

2. $A = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4\}$, $B = \{a_1, a_2, a_3\}$.

$C_A B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

1.6. Көптүктөрдүн түз көбөйтүндүсү

А н ы к т о о. X жана Y каалагандай көптүктөр болсун. Каалагандай $x \in X$, $y \in Y$ алалы жана

$$\{(x, y); x \in X, y \in Y\}$$

көптүк түзөлү. Түзүлгөн көптүк X, Y көптүктөрүнүн түз же декарттык көбөйтүндүсү деп аталат.

Түз көбөйтүндү

$$X \times Y = \{(x, y); x \in X, y \in Y\}$$

түрдө белгиленет.

$X \times Y$ көптүгүн түзүүдө (x, y) түгөйүндө биринчи элемент сөзсүз түрдө X ал эми экинчи элемент Y тен алынууга тийиш.

М и с а л. $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$.

$$X \times Y = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_3, y_2)\}.$$

2. Сандык көптүктөр

Математикалык анализ курсунда сандык көптүктөргө өзгөчө маани берилгендиктен бул көптүктөрдү өзүнчө бөлүп карайлы.

Сандык көптүктөр төмөндөгүдөй түргө бөлүнөт:

1. Натуралдык;

2. Бүтүн;

3. Рационалдык;

4. Чыныгы (анык);

5. Комплекстик

2.1. Натуралдык сандар

А н ы к т о о. Саноодо колдонулуп жүргөн сандардын көптүгүн натуралдык деп атайбыз.

Натуралдык сандарды белгилөө үчүн цифралар деп аталган $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ белгилер колдонулат.

Бул белгилердин жардамында натуралдык сандардын көптүгү төмөндөгүдөй белгиленип, жазылат

$$N = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,\ldots,n,n+1,\ldots\}.$$

Натуралдык сандарга тиешелүү болгон айрым түшүнүктөргө токтололу.

Натуралдык сандар жуп, так болуп бөлүнөт.

А н ы к т о о. Экиге эселүү болгон натуралдык сандар жуп ал эми калгандары так деп аталат.

Жуп натуралдык сандар $\{2n, n \in N\}$ түрдө, так натуралдык сандар $\{2n-1, n \in N\}$ түрдө белгиленет.

А н ы к т о о. Өзүнө жана бирге гана бөлүнгөн натуралдык сан жөнөкөй деп аталат.

М и с а л ы. 2,3,5,7,11,13 жөнөкөй сандар; 4,6,8,9 сандары жөнөкөй сандар боло албайт.

Төмөндөгү теорема туура болот.

Т е о р е м а 1. Ар кандай натуралдык санды бир гана көрүнүштү жөнөкөй натуралдык сандардын көбөйтүндүсү түрүндө ажыратып жазууга болот.

А н ы к т о о. $n_1 \in N$, $n_2 \in N$, $n_0 \in N$ жана $n_1 \vdots n_0$, $n_2 \vdots n_0$ болсун («$\vdots$»- белги калдыксыз бөлүнөт дегенди туюнтат). Бул шарттар аткарылганда n_0 саны n_1, n_2 сандарынын жалпы бөлүүчүсү деп аталат.

А н ы к т о о. Жалпы бөлүүчөлөрдүн эң чоңу, эң чоң жалпы бөлүүчү деп аталат,

$$(n_1, n_2) = n_0$$

түрдө белгиленет.

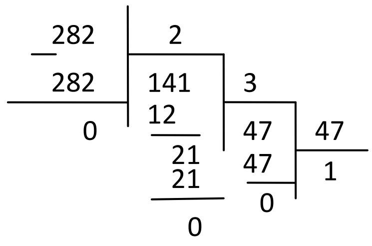
А н ы к т о о. $n_1 \in N$, $n_2 \in N$, $N_0 \in N$ жана $N_0 \vdots n_1$, $N_0 \vdots n_2$ болсун. Бул шарттар аткарылганда N_0 саны n_1 жана n_2 сандарынын жалпы бөлүнүүчүсү деп аталат.

А н ы к т о о. Жалпы бөлүнүүчүлөрдүн эң кичинеси, эң кичине жалпы бөлүнүүчү деп аталат,

$$\left[n_1, n_2\right] = N_0$$

түрдө белгиленет.

М и с а л д а р. 1. 282 санын жөнөкөй көбөйтүүчөлөргө ажыраткыла



Демек $282 = 2 \cdot 3 \cdot 47$.

2. 18, 9 сандарынын эң чоң жалпы бөлүүчүсүн тапкыла.

Бул сандарды жөнөкөй көбөйтүүчүлөргө ажыраталы

$$18 = 2 \cdot 3^2, \; 9 = 3^2.$$

Эки санга тең катышкан жөнөкөй көбөйтүүчөлөрдү алалы (эселүүлөрү болсо алардын эң кичинесин алабыз). Биздин учурда мындай көбөйтүүчү 3^2. Демек

$$(18{,}9) = 3^2.$$

3. 42, 96 сандарынын эң кичине жалпы бөлүнүүчүсүн тапкыла.

Бул сандарды жөнөкөй көбөйтүүчүлөргө ажыраталы

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7, \; 96 = 2^5 \cdot 3.$$

Ажыралмалардан эки санга тең тиешелүү болгон жана болбогон жөнөкөй көбөйтүүчөлөрдү алалы (эселүү болсо, эң чоң эселүүсүн алабыз), б.а. 2^5, 3, 7. Бул сандардын көбөйтүндүсү эң кичине жалпы бөлүнүүчү болот

$$2^5 \cdot 3 \cdot 7 = 672, \text{ б.а. } \left[42{,}96\right] = 672.$$

2.2. Бүтүн сандар

Натуралдык сандардын көптүгү берилсин. Каалагандай $n \in N$ алалы.

А н ы к т о о. $(-n)$ саны n санына карама-каршы сан деп аталат.

М и с а л ы. 2 ге карама-каршы сан (-2); 3 кө карама-каршы сан (-3); 4 кө карама-каршы сан (-4); ж.у.с.

Натуралдык сандарга карама-каршы сандардын баардыгын алалы жана бул көптүктү

$$N_- = \{-1, -2, -3, -4, \ldots, -n, \ldots\}$$

түрдө белгилейли.

А н ы к т о о. Натуралдык сандар көптүгүн, ага карама-каршы сандар көптүгүн, нөлдү бириктирүүдөн келип чыккан сандардын көптүгүн бүтүн сандар көптүгү деп айтабыз.

Бүтүн сандардын көптүгүн Z аркылуу белгилейли.

$$Z = N \cup N_- \cup \{0\}.$$

Демек $N \subset Z$.

2.3. Рационалдык сандар.

Бүтүн сандар көптүгү Z берилсин.

А н ы к т о о. $\frac{m}{n}$ көрүнүштөгү сан бөлчөк деп аталат, мында $m \in Z$, $n \in N$. m – бөлчөктүн алымы, n – бөлүмү деп аталат.

М и с а л ы. $\frac{1}{2}$, $\frac{-4}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{-13}{11}$, ж.у.с.

$\frac{m}{n}$ жазуусу практикада m санын n ге бөлүү деп да түшүнүлөт. Жогорудагы аныктоону эске алсак

$$\frac{m}{n} \equiv m : n.$$

Демек ар кандай бүтүн санды бөлүмү бирге барабар болгон бөлчөк түрүндө жазууга болот, б.а.

$$Z = \left\{\frac{m}{1}, m \in Z\right\}.$$

Бөлчөктүн алдына коюлган белги алымга тиешелүү деп эсептелинет.

А н ы к т о о. $\left\{\frac{m}{n}, m \in Z, n \in N\right\} = Q$ көптүгү рационалдык сандардын көптүгү деп аталат.

Жогоруда айтылгандарды эске алсак $Z \subset Q$.

Бөлчөктөр төмөндөгүдөй түргө бөлүнөт:

1. Дурус $\left(\frac{m}{n}, |m| < n\right)$; $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, … .

2. Буруш $\left(\frac{m}{n}, |m| \geq n\right)$; $\frac{4}{3}$, $-\frac{6}{5}$, $\frac{14}{8}$, … .

3. Аралаш $\left(\kappa\frac{m}{n}, \kappa - \text{б \ т \ н бъл \ к}\right)$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, … .

Э с к е р т ү ү: Буруш бөлчөктү аралаш бөлчөк түрүндө жана тескерисинче жазууга болот.

М и с а л ы. $\frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$; $3\frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{11}{3}$.

Бөлчөктөрдү салыштырууга токтололу.

Ар кандай терс бөлчөк оң бөлчөктөн кичине болгондуктан, оң бөлчөктөрдү гана салыштыралы.

$\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$ берилсин.

а) $n_1 = n_2$ болсо, анда $m_1 < m_2$ болгондо $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}$ болот.

б) $n_1 \neq n_2$ болсо, анда бөлчөктөрдү бирдей бөлүмгө келтиребиз жана а) эрежесин колдонобуз.

Бөлчөктөрдүн үстүнөн амалдар.

Кошуу. Бөлчөктөрдү кошуу (кемитүү) үчүн, бөлчөктөрдү бирдей бөлүмгө келтирип алымдарын кошуу (кемитүү) керек.

М и с а л. $\frac{4}{7} + \frac{6}{5} = \frac{20}{35} + \frac{42}{35} = \frac{20+42}{35} = \frac{62}{35}$.

Көбөйтүү. Бөлчөктөрдү көбөйтүү үчүн алымды алымына, бөлүмүн бөлүмүнө көбөйтөбүз.

М и с а л. $\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = -\frac{8}{15}$.

Бөлүү. ***А н ы к т о о***. Бөлчөктөрдүн көбөйтүндүсү бирге барабар болсо, анда алар өз ара тескери деп аталат.

М и с а л ы. $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = 1$, $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = 1$, $\left(-\frac{6}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = 1$, … .

Бөлчөктөрдү бөлүү үчүн, биринчи бөлчөккө экинчи бөлчөктүн тескерисин көбөйтөбүз.

М и с а л ы. $\frac{5}{6}:\frac{3}{4}=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{3}=\frac{20}{18}=\frac{10}{9}$.

Жазылышы боюнча $\frac{m}{n}$ көрүнүшүнөн айырмаланып жазылган бөлчөктөр кездешет. Мындай бөлчөктөрдүн бири катары ондук бөлчөктөрдү атап кетсек болот. Ондук бөлчөктөр жалпы учурда төмөндөгүдөй көрүнүштө жазылат:

$$n_1n_2...n_k\,,m_1m_2...m_r\,.$$

$n_1n_2...n_k$ – саны бөлчөктүн бүтүн бөлүгү, m_1, m_2,…, m_r – цифралары бөлчөктүн ондук, жүздүк, ж.б. үлүштөрүн туюнтат.

Мисалы. $12{,}952$; $-4{,}361$; … .

Ондук бөлчөктөрдүн үстүнөн да кошуу, кемитүү, көбөйтүү, бөлүү амалдарын аткарууга болот.

2.4. Чыныгы сандар

Киришүү

Q көптүгү берилсин. Мындай суроону коелу: $\frac{m}{n}$ көрүнүшүндө жазууга мүмкүн болбогон сан барбы? Коюлган суроого төмөндөгүдөй теорема жооп берет.

Т е о р е м а 2. Квадраты 2 ге барабар болгон рационалдык сан жашабайт, б.а. $\frac{m}{n}\in Q$ болсо, анда $\left(\frac{m}{n}\right)^2\neq 2$.

Д а л и л д ө ө. Жалпылыкты бузбастан $\frac{m}{n}\in Q$, $m\in N$, $n\in N$ жана $(m,n)=1$ деп эсептейли.

$\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$ болсун. Мындан $m^2=2n^2$ же m – жуп натуралдык сан экендиги келип чыгат. $m=2k$, $k\in N$ дейли, анда $(2к)^2=2n^2$ же $2k^2=n^2$, бул барабардыктан да $n=2p$, $p\in N$. Жыйынтыктап айтканда $(m,n)=2$. Шарт боюнча $(m,n)=1$. Бул карама-каршылыктан $\left(\frac{m}{n}\right)^2\neq 2$ болоору келип чыгат. Теорема далилденди.

Далилденген теореманын негизинде, рационалдык сандардын көптүгүнө таандык болбогон да сандар жашайт деп жыйынтык чыгара алабыз. Бул сандарды аныктайлы.

Иррационалдык санды аныктоо

Q көптүгү берилсин. Бул көптүктү эки бош эмес A_1, A_2 көптүктөргө бөлөлү. A_1, A_2 бош көптүктөр болбогондуктан, жок дегенде бирден элементтери болот.

А н ы к т о о. Төмөндөгү шарттар аткарылсын:

1. Каалаган рационалдык сан A_1, A_2 көптүктөрдүн бирине гана таандык;

2. $a_1 \in A_1$ жана $a_2 \in A_2$ болсо, анда $a_1 < a_2$;

Жогорудагы шарттар аткарылганда Q көптүгүндө кесилиш түзүлдү деп айтабыз, $A_1 | A_2$ түрдө белгилейбиз.

A_1 – кесилиштин төмөнкү, A_2 – жогорку класстары деп аталышат.

Кесилишке мисалдар келтирели.

1. A_1 ди $a_1 < 5$ барабарсыздыгын канааттандыруучу, баардык a_1 рационалдык сандардын көптүгү, ал эми A_2 ни, $a_2 \geq 5$ барабарсыздыгын канааттандыруучу, a_2 рационалдык сандардын көптүгү катары аныктайлы.

Келип чыккан A_1, A_2 көптүктөрү Q көптүгүндө кесилишти аныктайт. Чындыгында каалагандай r рационалдык санды алсак, бул сан үчүн $r < 5$, $r > 5$, $r = 5$ шарттын бир гана аткарылат, б.а. $r \in A_1$ же $r \in A_2$ болот. Экинчиден $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ болсо, анда $a_1 < 5 \leq a_2$ болгондуктан $a_1 < a_2$.

Белгилей кетүүчү нерсе, 5 саны A_2 классына таандык болуу менен андагы эң кичине сан болот, ал эми A_1 классында эң чоң сан жашабайт. Чындыгында каалагандай $a_1 \in A_1$ болсун, анда $a_1 < \frac{a_1 + 5}{2} < 5$, б.а. $\frac{a_1 + 5}{2} \in A_1$.

2. A_1 көптүгүнө $a_1 \leq 5$ болгон баардык a_1 рационалдык сандарды, A_2 көптүгүнө $a_2 > 5$ болгон баардык a_2 рационалдык сандарды киргизели. A_1 жана A_2 көптүктөрү кесилишти түзөт. A_1 классында эң чоң сан жашайт (5), A_2 классында эң кичине сан жашабайт. Бул сүйлөмдүн тууралыгы жогорудагыдай эле далилденет.

3. A_1 көптүгүнө $a_1^2 < 2$ болгон баардык оң a_1 рационалдык сандарды, нөлдү терс рационалдык сандарды; ал эми A_2 көптүгүнө калган баардык рационалдык сандарды киргизели. Түзүү боюнча A_2 көптүгүндөгү рационалдык сандар үчүн $a_2 > 0$ жана $a_2^2 > 2$ шарты аткарылат. A_1 жана A_2 көптүктөрү Q да кесилишти түзөт. Каралып жаткан учурда A_1 классында эң чоң, A_2 классында эң кичине сан жашабайт. Бул сүйлөмдүн экинчи бөлүгүн далилдейли (биринчиси ушундай эле жол менен далилденет).

Далилдөөнү каршысынан жүргүзөлү. $a_2 \in A_2$ жана бул класстагы эң кичине сан болсун . Шарт боюнча $a_2^2 > 2$ жана $a_2 > 0$. $a_2 - \frac{1}{n}$, $n \in N$ санын алалы.

$\left(a_2 - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$ шарты аткарыла тургандай $n \in N$ ди табууга болобу? Жазылган барабарсыздык төмөндөгүдөй барабарсыздыктарга тең күчтө болот:

$$a_2^2 - \frac{2}{n}a_2 + \frac{1}{n^2} > 2, \; -\frac{2a_2}{n} + \frac{1}{n^2} > 2 - a_2^2.$$

$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n^2}$ болгондуктан $-\frac{2a_2}{n} + \frac{1}{n} > 2 - a_2^2$ аткарылат, мындан $a_2^2 > 2$ шартын эске алып $n > \frac{2a_2 - 1}{a_2^2 - 2}$ барабарсыздыгына ээ болобуз. Бул барабарсыздыкты канааттандыруучу n натуралдык саны каалагандай $a_2 \in A_2$ үчүн жашайт.

Демек $\left(a_2 - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$ аткарыла тургандай $n \in N$ жашайт. Экинчи жактан n жетишээрлик чоң болгондо $a_2 - \frac{1}{n} > 0$ шарты аткарылат (ал үчүн $n > \max\left\{\frac{2a_2 - 1}{a_2^2 - 2}, \frac{1}{a_2}\right\}$ деп алуу жетиштүү).

Биз төмөндөгүгө ээ болдук: $\left(a_2 - \frac{1}{n}\right) \in A_2$. $a_2 - \frac{1}{n} < a_2$ болгондуктан, a_2 саны A_2 классныдагы эң кичине сан боло албайт. Мындан жогорудагы сүйлөмдүн экинчи бөлүгүнүн тууралыгы келип чыгат.

Жогоруда каралган мисалдар көрсөтүп жаткандай Q көптүгүндө үч түрдүү кесилиш түзүлдү. «Төмөнкү класста эң чоң жогорку класста эң кичине сан жашай тургандай кесилиш түзүүгө болобу?» деген суроонун келип чыгышы табигый нерсе. Мындай кесилиш түзүлсүн, б.а. $a_1 \in A_1$ жана андагы эң чоң сан, $a_2 \in A_2$ жана андагы эң кичине сан болсун. Түзүү боюнча $a_1 < a_2$. Ар дайым $a_1 < c < a_2$ шартын канааттандыруучу c – рационалдык саны жашайт, $c = \frac{a_1 + a_2}{2}$, бирок бул сан A_1, A_2 класстардын бирине да таандык боло албайт, б.а. кесилиштин аныктоосунун 1 – шарты аткарылбайт. Төмөнкү класста эң чоң жогорку класста эң кичине сан болгон кесилиш жашабайт.

Жыйынтыктап айтканда Q рационалдык сандардын көптүгүндө, каралган мисалдар тастыктагандай, үч түрдүү гана кесилиш түзүүгө болот:

1. Төмөнкү класста эң чоң сан жашайт, жогорку класста эң кичине сан жашабайт.

2. Төмөнкү класста эң чоң сан жашабайт, жогорку класста эң кичине сан жашайт.

3. Төмөнкү класста эң чоң сан, жогорку класста эң кичине сан жашабайт.

А н ы к т о о. 1-2 – түрдөгү кесилиштер рационалдык сандарды аныктайт, б.а. рационалдык сандар аркылуу жүргүзүлөт, 3 – түрдөгү кесилиш рационалдык сандар аркылуу жүргүзүлбөйт деп айтабыз.

А н ы к т о о. 3 – түрдөгү кесилиш аныктаган санды иррационалдык сан деп атайбыз.

Рационалдык сандардын көптүгүндө түзүлгөн кесилиш аныктаган сандар, бул кесилиштер үчүн чек аралык болуп эсептелишет. Кесилиш рационалдык сан аркылуу жүргүзүлгөндө чек аралык сан кесилиштин бир классына таандык болот. 3 – түрдөгү кесилиш учурунда аныкталган иррационалдык сан эки класстагы рационалдык сандардын ортосуна коюулуу менен жетишпеген чек аралык сандын ролун аткарат.

Жогоруда каралган үчүнчү мисалдагы чек аралык сан $\sqrt{2}$ болот.

Мындан кийинки баяндообузда рационалдык, иррационалдык сандарды, бул сандарды аныктаган кесилиштер менен байланыштыралы. Иррационалдык сандардын көптүгүн I тамгасы аркылуу белгилейли.

А н ы к т о о. Рационалдык жана иррационалдык сандарды бириктирүүдөн келип чыккан көптүктү чыныгы сандардын көптүгү деп атайбыз, R аркылуу белгилейбиз.

$$R = Q \cup I,\ Q \cap I = \varnothing.$$

Чыныгы сандарды иреттөө

Рационалдык сандардын ортосундагы "=", ">","<" катыштардын орун алышы менен биз орто мектептин математика курсунда тааныш болгонбуз. Бул катыштарды жалпысынан чыныгы сандар үчүн аныктайлы. $A_1|A_2$ кесилиши q_1 ди $B_1|B_2$ кесилиши q_2 ни аныктасын.

А н ы к т о о. 1. $A_1 \equiv B_1$ болсо, $q_1 = q_2$;

2. $A_1 \subset B_1$ болсо, анда $q_1 < q_2$;

3. $B_1 \subset A_1$ болсо, анда $q_1 > q_2$ деп атайбыз.

Аныктоонун негизинде каалагандай r, q чыныгы сандар үчүн

$$r = q,\ r > q,\ r < q$$

катыштарынын бири гана аткарылышы келип чыгат.

Ошондой эле төмөндөгү касиеттер орун алат:

1. $q_1 > q_2$, $q_2 > q_3$ болсо, $q_1 > q_3$ болот.

2. $q_1 > q_2$ болсо, $q_2 < q_1$ болот.

Жардамчы леммалар

Л е м м а 1. $\alpha \in R$, $\beta \in R$ жана $\alpha > \beta$ болсун. r – чыныгы (рационалдык) саны жашап $\alpha > r > \beta$ болот.

Д а л и л д ө ө. α саны $A_1|B_1$, β саны $A_2|B_2$ кесилиштери аркылуу аныкталсын. Шарт боюнча $\alpha > \beta$ болгондуктан $A_2 \subset A_1$ болот. Анда жок дегенде бир r рационалдык саны жашап $r \in A_1$, $r \notin A_2$ болот. Демек (аныктоонун негизинде) $\beta < r < \alpha$. Лемма далилденди.

Л е м м а 2. 1. $q_1 \in R$, $q_2 \in R$.

2. Каалагандай r $(r > 0)$ – рационалдык сан үчүн $r_1 - r_2 < r$ шартын канаатандырган r_1, r_2 – рационалдык сандар жашап

$$r_2 \le q_1 \le r_1,\ r_2 \le q_2 \le r_1$$

аткарылсын. Жогорудагы шарттар аткарылганда $q_1 = q_2$ болот.

Д а л и л д ө ө. Далилдөөнү каршысынан жүргүзөлү $q_1 > q_2$ болсун. Лемма 1 боюнча $q_1 > r_1' > r_2' > q_2$ боло тургандай r_1', r_2' – рационалдык сандар жашайт. Мындан $r_2 < r_2' < r_1' < r_1$. Анда $r_1 - r_2 > r_1' - r_2'$. $r = r_1' - r_2'$ деп алсак $r_1 - r_2 > r$. Демек 2 шарт аткарылбайт. Бул карама-каршылыктан лемманын тууралыгы келип чыгат.

Чыныгы сандардын көптүгүнүн үзгүлтүксүздүгү

Биз жогоруда рационалдык сандардын көптүгүндө кесилиштерди түзүүдө, кесилиш аныктаган сан бул көптүккө таандык болбогон учурлар кездешти. Рационалдык сандардын көптүгүндөгү мындай жетишпегендик иррационалдык сан түшүнүгүнө алып келди.

Эми кесилиштерди чыныгы сандардын көптүгүндө түзөлү.

А н ы к т о о. 1. Чыныгы сандардын көптүгү бош болбогон эки R_1, R_2 көптүктөгү бөлүнсүн.

2. Каалаган чыныгы сан R_1, R_2 көптүктөрүнүн бирине гана таандык болсун.

3. Каалагандай $r_1 \in R_1$, $r_2 \in R_2$ үчүн $r_1 < r_2$ болсун.

Жогорудагы шарттар аткарылганда R_1, R_2 чыныгы сандардын (R) көптүгүндө кесилишти аныктайт деп айтабыз. R_1 кесилиштин төмөнку, R_2 жогорку классы деп аталат.

Төмөндөгүдөй суроону коелу: Чыныгы сандардын көптүгүндө түзүлгөн каалаган кесилиш үчүн бул кесилиш аныктаган чек аралык сан жашайбы жана ал чыныгы сан болобу? Бул суроого төмөндөгүдөй теорема жооп берет.

Н е г и з г и   т е о р е м а (Дедекинддин теоремасы) 3. Чыныгы сандардын көптүгүндөгү каалаган $R_1|R_2$ кесилиш үчүн бул кесилиш аныктаган r чыныгы саны жашайт. Бул сан, R_1 классындагы эң чоң же R_2 класстагы эң кичине сан болот.

Д а л и л и д ө ө. Q_1 деп R_1 классындагы баардык рационалдык сандардын көптүгүн, Q_2 деп R_2 классындагы баардык рационалдык сандарды белгилейли. Q_1, Q_2 көптүктөрү Q көптүгүндө кесилишти аныктайт. $Q_1|Q_2$ кесилиши r чыныгы санын аныктайт. $r \in R_1$ же $r \in R_2$ болот. $r \in R_1$ болуп бул көптүктөгү эң чоң сан болоорун далилдейли. r саны R_1 де эң чоң сан болсун. Анда $r_1 \in R_1$ жана $r_1 > r$ боло тургандай r_1 чыныгы сан жашайт. Лемма 1 боюнча $r < r_0 < r_1$ шартын канаатандыруучу r_0 рационалдык саны жашайт жана $r_0 \in R_1$ болот. Мындай болгондо $r_0 \in Q_1$ болууга тийиш.

Демек r_0 рационалдык саны кесилиштин төмөнкү классына таандык болуп, бул кесилиш аныктаган r чыныгы санынан чоң. Бул карама-каршылыктан теореманын биринчи бөлүгүнүн тууралыгы келип чыгат. Экинчи бөлүктүн тууралыгы ушундай эле далилденет. Теорема толук далилденди.

Далилденген теорема чыныгы сандардын көптүгүнүн толуктугун же үзгүлтүксүздүгүн туюнтат.

Э с к е р т ү ү. Лемма 1 ди колдонуу менен төмөнкү класста эң чоң, жогорку класста эң кичине сан жашай тургандай кесилиш түзүүгө болбой тургандыгын далилдөөгө болот.

Сандык көптүктөрдүн чек аралары

$X = \{x, x \in R\}$ каалагандай чексиз, чыныгы сандардын көптүгү берилсин.

М и с а л ы. 1. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ теңдеменин тамырларынын көптүгү.

2. -1, 1 сандарынын арасындагы чыныгы сандар.

3. $f(x) = \sqrt{x}$ функциясынын аныкталуу областы.

А н ы к т о о. Каалаган $x \in X$ үчүн $x \le M$ болсо, анда X жогор жагынан чектелген деп атайбыз.

M жогорку чек деп аталат.

М и с а л ы. -1, 1 сандарынын арасындагы чыныгы сандардын көптүгү жогор жагынан 1 саны менен чектелген.

А н ы к т о о. Каалаган $x \in X$ үчүн $m \le x$ болсо, анда X төмөн жагынан чектелген деп атайбыз.

m төмөнкү чек деп аталат.

М и с а л ы. N көптүгү төмөн жагынан 1 саны менен чектелген.

Эгерде X көптүгү жогор (төмөн) жагынан M (m) саны менен чектелген болсо, анда бул көптүк M ден (m ден кичине) чоң каалагандай сан менен да чектелген болот, б.а. чексиз көп жогорку (төмөнкү) чектер жашайт. Мындай болгондо жогорку (төмөнкү) чектердин эң кичинеси (эң чоңу) жашайбы? – деген суроонун келип чыгышы табигый нерсе. Бул суроого жооп берүүнүн алдында төмөндөгүдөй аныктоону киргизели.

А н ы к т о о. Жогорку (төмөнкү) чектердин эң кичинесин (эң чоңун) нак жогорку (төмөнкү) чек деп атайбыз.

Нак жогорку чекти $\sup X = \sup\{x\}$, нак төмөнкү чекти $\inf X = \inf\{x\}$ деп белгилейбиз.

Жогоруда коюлган суроого төмөндөгү теорема жооп берет.

Т е о р е м а 4. X көптүгү жогор (төмөн) жагынан чектелген болсо, анда бул көптүктүн нак жогорку (төмөнкү) чеги жашайт.

Д а л и л д ө ө. Далилдөөнү жогорку чек үчүн жүргүзөлү. Төмөнкү чек үчүн ушундай эле далилденет. Эки учурду карайлы:

1. x_0 X көптүгүнүн элементтеринин ичиндеги эң чоңу болсун. Каалаган $x \in X$ үчүн $x \le x_0$, экинчиден каалаган M жогорку чек үчүн $x_0 \le M$. Мындан $x_0 = \sup X$.

2. X көптүгүнүн элементтеринин ичинде эң чоңу жок. Чыныгы сандардын көптүгүндө кесилиш түзөлү. Жогорку R_2 классына баардык жогорку чектерди, ал эми төмөнкү R_1 классына калган чыныгы сандарды киргизели. Мындай бөлүүнүн натыйжасында X көптүгүнүн баардык элементтери R_1 классына таандык болушат (шарт боюнча X те эң чоң элемент жашабайт).

Дедекинддин негизги теоремасы боюнча бул кесилиш аныктаган q чыныгы саны жашайт. Кесилиштин аныктоосу боюнча R_1 дин каалаган элементи (ошондой эле X тин) q дан кичине. Демек q саны X үчүн жогорку чек, анда $q \in R_2$ жана Дедекиндин теоремасы боюнча бул көптүктөгү эң кичине сан болот. R_2 көптүгү жалаң гана жогорку чектерден тургандыктан q жогорку чектердин эң кичинеси катары $\sup X$ болот. Теорема далилденди.

Нак жогорку чектин аныктоосунан төмөндөгүлөр келип чыгат. $M = \sup X$ болсун, анда

1. $x \in X : x \le M$;

2. $\forall \varepsilon > 0 : \exists x_0 \in X \;\wedge\; M - \varepsilon < x_0$.

Жогоруда жазылган эки барабарсыздык нак жогорку чекти толук мүнөздөйт.

Нак төмөнкү чек үчүн да ушундай эле барабарсыздыктарды жазууга болот.

2.6. Сандык көптүктөрдүн айрым түрлөрү

Кийинки баяндоолорубузда колдонулуучу айрым сандык көптүктөрдү аныктайлы.

R чыныгы сандардын көптүгү берилсин.

А н ы к т о о. $a \le x \le b$ барабарсыздыгын канаатандыруучу x чыныгы сандардын көптүгүн туюк интервал (сегмент, кесинди, аралык) деп атайбыз.

$[a,b]$ – түрдө белгилейбиз.

А н ы к т о о. $a < x < b$ барабарсыздыкты канаатандыруучу x чыныгы сандардын көптүгүн ачык интервал же жөн эле интервал деп атайбыз.

(a,b) – түрдө белгилейбиз.

А н ы к т о о. $a \le x < b$ же $a < x \le b$ барабарсыздыктарын канааттандыруучу x чыныгы сандардын көптүгүн жарым интервал деп атайбыз.

$[a,b)$ же $(a,b]$ түрдө белгилейбиз.

Жогоруда аныкталган сандык көптүктөрдүн нак жогорку, нак төмөнкү чектерин карайлы.

$[a,b]$ – көптүгү берилсин. Аныктоо боюнча бул көптүктөгү эң чоң сан b ; эң кичинеси a . Демек $\sup\{[a,b]\} = b$, $\inf\{[a,b]\} = a$ жана бул чектер берилген көптүккө таандык болушат.

Калган көптүктөр үчүн ушундай эле жол менен нак жогорку, төмөнкү чектердин жашашы көрсөтүлөт, бирок бул чектердин баардыгы эле каралып жаткан көптүккө таандык боло бербейт.

Чыныгы сандардын көптүгү жогор жана төмөн жактардан чектелген эмес.

А н ы к т о о. Эгерде сандык көптүк жогор жагынан чектелбеген болсо, анда бул көптүккө таандык болгон каалаган x чыныгы саны үчүн $x < +\infty$ (плюс чексиз деп окулат) барабарсыздык орун алат деп айтабыз.

Ушундай эле аныктоону төмөн жагынан чектелбеген көптүк үчүн да жазууга болот, б.а. $-\infty < x$ (минус чексиз).

Бул аныктоолордун негизинде R чыныгы сандардын көптүгүн төмөндө-гүдөй жаза алабыз

$$-\infty < x < +\infty, \text{ б.а. } (-\infty,+\infty) \equiv R .$$

3. Чоңдуктар

Сандар, узундук, көлөм, аянт, температура, ылдамдык ж.б. чоңдуктарга мисал боло алат.

Чоңдуктар турактуу жана өзгөрүлмө болуп бөлүнөт.

А н ы к т о о. Эгерде чоңдуктун мааниси убакыттын өтүшү менен өзгөрбөсө, анда ал турактуу; түрдүү маанилерди кабыл алса өзгөрүлмө деп аталат.

М и с а л ы. Имараттын өлчөмдөрү (узундугу, туурасы, бийиктиги) турактуу чоңдуктар; кыймылдагы машинанын ылдамдыгы өзгөрүлмө чоңдук.

А н ы к т о о. Өзгөрүлмө чоңдуктун мүмкүн болгон маанилеринин көптүгү, бул чоңдуктун өзгөрүү областы деп аталат.

Өзгөрүлмө чоңдуктарды $x, y, z, t, v, \ldots$, ал эми өзгөрүү областтарды $X, Y, Z, T, V, \ldots$ деп белгилейли. Мындай белгилөөлөр шарттуу түрдө гана каалагандай белгилөөгө да болот.

3.1. Чоңдуктардын ортосундагы байланыштар.

Өзгөрүү областтары X, Y болгон x жана y чоңдуктары берилсин. x чоңдугунун өзгөрүшү менен y чоңдугу да өзгөрсүн, б.а. бул эки чоңдуктун ортосунда байланыш (көз карандылык) орун алсын.

А н ы к т о о. Эгерде чоңдуктардын ортосунда көз карандылык орун алса, анда бул көз карандылыкты функционалдык деп атайбыз.

М и с а л ы. 1. x жана y сандарынын ортосунда $\frac{y}{x} = \pm k - const$ катышы орун алсын. x өзгөргөндө y да өзгөрөт. $x = 1$ болгондо, $y = \pm k$; $x = -1$ болгондо, $y = \mp k$; ж.у.с.

2. Жактары x (өзгөрүлмө) жана $a - const$ болгон тик бурчтук берилсин. Бул тик бурчтуктун аянты $S = a \cdot x$ болот. x өзгөргөндө S да өзгөрөт.

3. $y = x^2$ болсун. $x = 1$ болгондо $y = 1$; $x = -1$ болгондо $y = 1$. Жогорудагы аныктоону жана мисалдарды эске алсак, анда x жана y чоңдуктардын ортосундагы функционалдык көз карандылык ар кандай болоору байкалат, б.а. x тин ар бир маанисине y тин бир нече мааниси; y тин анык бир мааниси; x тин бир нече маанисине y тин анык бир мааниси тиешелеш коюлат.

3.2. Функциянын аныктоосу.

Биз жогоруда чоңдуктардын ортосунда функционалдык көз карандылык орун алса, анда алардын кабыл алган маанилеринин ортосундагы тиешелештиктин ар кандай болоорун байкадык.

Төмөндөгү аныктоо аркылуу функционалдык көз карандылыктын айрым классын бөлөлү.

А н ы к т о о: 1. x жана y чоңдуктарынын өзгөрүү областтары X жана Y болсун. 2. x жана y чоңдуктарынын ортосунда функционалдык көз карандылык орун алсын. 3. Каалагандай $x \in X$ үчүн анык бир $y \in Y$ ти тиешелеш кое турган эрежелер (закондор) жашасын (аларды $f, g, F,$ ж.у.с. деп белгилейли).

Жогорудагы шарттар аткарылганда y чоңдугу x чоңдугунан функция деп аталат.

$$y = f(x),\ y = g(x),\ y = F(x), \ldots$$

түрдө белгиленет.

x – аргумент, y – функция, X – функциянын аныкталуу, Y – маанилеринин көптүгү деп аталат.

Бул аныктоо аркылуу аныкталган функциялар бир манилүү деп аталышат. Эгерде аныктоодогу «анык бир» деген сөздөрдү «бир нече» деп алмаштырсак, анда көп маанилүү функцияга ээ болобуз.

Биз мындан кийин негизинен бир манилүү функцияларды гана карайбыз.

3.3. Функциялардын берилиш жолдору.

Функциялар төмөндөгү жолдордун бири аркылуу берилет:

1. Аналитикалык.

2. Таблицалык.

3. Графикалык.

Ар бир жолго кыскача токтололу.

1. Аналитикалык жолдо тиешелештик эреже (закондор) тизмегин камтыган аналитикалык туюнтма же формула берилет.

М и с а л ы. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Аналитикалык жолдо функция бир нече формулалар аркылуу да берилиши мүмкүн.

М и с а л ы. $f(x)=\begin{cases} x^2-1, \ x<0; \\ 1, \ x=0; \\ x^2+1, \ x>0. \end{cases}$

Экинчи жактан аналитикалык жолдо ар дайым эле туюнтма же формула берилет деп түшүнүүгө да болбойт.

Тиешеликтик эреже сөздөрдүн тизмеги аркылуу да берилиши мүмкүн.

М и с а л ы. $f(x)=E(x)$ мында $E(x)$ – x санынын бүтүн бөлүгү дегенди туюнтат. Тиешеликтик эреже төмөндөгү аныктоо аркылуу берилет.

А н ы к т о о. x санынын бүтүн бөлүгү деп, x тен чоң болбогон эң чоң бүтүн санды айтабыз.

М и с а л ы. $E(1)=1$, $E(-1)=-1$, $E(2{,}34)=2$, $E(-3{,}4)=-4$.

2. Айрым кубулуштарды изилдөөдө чоңдуктардын ортосундагы көз карандылык байкоо же эксперимент аркылуу орнотулат жана бул көз карандылык формула түрүндө берилбестен эксперименттен (байкоодон) алынган чоңдуктардын маанилеринин таблицасы түрүндө берилет.

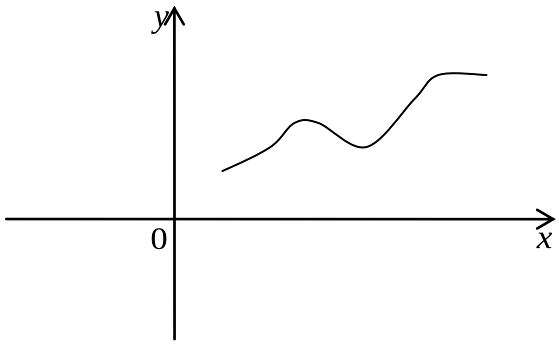
М и с а л ы.

x	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Функциянын мындай жол менен берилиши таблицалык деп аталат.

3. 1. Тик бурчтуу координаталар системасында $\{(x,y), x\in R, y\in R\}$ чекиттердин көптүгү берилсин жана бул көптүк кандайдыр бир ийрини аныктасын.

2. y чоңдугу x тен көз каранды (функция) болсун.



Функциянын мындай жол менен берилиши графикалык деп аталат.

Аталган жолдорду тиешелештик эреже, аныкталуу, маанилердин областы, график түшүнүктөрүнүн негизинде мүнөздөөгө өз алдынча аткарууга сунуш кылабыз.

3.4. Функциялардын айрым класстары.

Биз төмөндө жалпы аналитикалык жол менен берүүгө мүмкүн болгон айрым функциялардын класстары менен таанышабыз.

1. Элементардык функциялар.

1.1. Бүтүн жана бөлчөктүү рационалдык функциялар.

А н ы к т о о. $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \ \ (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in R)$ – көрүнүшүн-дөгү функция бүтүн функция деп аталат.

Барабардыктын оң жагындагы туюнтма n даражадагы полином (көп мүчө) деп аталат.

Бүтүн функциянын аныкталуу области R болот.

n =1 болсун, анда $y = a_1 x + a_0$ функцияга ээ болобуз. Бул функция сызыктуу деп аталат.

n =2 болгондо $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ квадраттык функцияга ээ болобуз.

А н ы к т о о. $y = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$ – бөлчөктүү рационалдык функция деп аталат.

Рационалдык функциянын аныкталуу области

$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \neq 0$$

шартын канааттандырган x тин маанилери болот.

1.2. Даражалык көрсөткүчтүү, логарифмалык, тригонометриялык функциялар.

Төмөндө каралуучу функциялар негизинен орто мектеп курсунда каралгандыктан бул функциялардын касиеттерине кеңири токтолбостон аныктоолорду гана келтиребиз.

А н ы к т о о. $y = x^\mu, \ \mu \in R$ даражалык функция деп аталат.

μ нун түрдүү маанилеринде ар кандай функцияларга ээ болобуз.

$\mu \in N$ болсо, $y = x^\mu$ – бүтүн функция;

$\mu \in Z$ болсо, $y = x^\mu$ – бөлчөктүү рационалдык функция;

$\mu \in Q \ \left(\mu = \dfrac{m}{n}\right)$ болсо, $y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$;

$\mu \in J$ болгон учурларда $y = x^\mu$ функцияларын өзгөчө изилдөөнү талап кылат.

А н ы к т о о. $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ – көрсөткүчтүү функция деп аталат.

А н ы к т о о. $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ – логарифмалык функция деп аталат.

А н ы к т о о. $y = \sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$ – тригонометриялык функциялар деп аталышат.

1.3. Тескери функция жөнүндө түшүнүк.

Төмөндөгү аныктоону киргизүү менен каралып жаткан функциялардын класстарын кеңейтүүгө болот.

$y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ функциясы берилсин. $x_0 \in X$ болсо, аргументтин мааниси, бул мааниге функциянын $y_0 \in Y$ мааниси тиешелештикке коюлат.

$y_0 \in Y$ ти алалы, анда X көптүгүнөн бул мааниге тиешелеш болгон бир же бир нече x тин мааниси жашайт. Демек Y көптүгүндү аныкталган бир же көп маанилүү $x = g(y)$ функциясы жашайт.

А н ы к т о о. $y = f(x)$ жана $x = g(y)$ функциялары өз ара тескери функциялар деп аталышат.

М и с а л д а р. 1. $y = a^x$ жана $x = \log_a y$ функциялары өз ара бир маанилүү тескери функциялар болушат.

2. $y = x^2$, $x = \pm\sqrt{y}$ өз ара тескери функциялар (бир маанилүү эмес).

1.4. Тескери тригонометриялык функциялар.

$y = \sin x$, $x \in R$, $y \in [-1{,}1]$ функциясы берилсин.

Бул функция аныкталышы боюнча бир маанилүү. Бирок y тин $[-1{,}1]$ аралыгынан алынган каалаган маанисине x тин R көптүгүнөн чексиз көп мааниси тешелеш коюлат. Мисалы $y = \dfrac{1}{2}$ десек, анда $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$. Демек берилген функцияга тескери функция чексиз көп маанилүү функция болуп эсептелет. Өз ара бир маанилүү функцияны алуу үчүн $x \in X = [-\pi, \pi]$, $y \in Y = [-1{,}1]$ аралыктарын кароо жетиштүү. Аныкталуу областы Y маанилеринин областы X болгон. $y = \sin x$ функциясына тескери функция жашайт.

А н ы к т о о. $y = \sin x$ функциясына тескери функцияны $x = \arcsin y$ (арксинус) деп атайбыз жана белгилейбиз.

$x = \arcsin y$ функциянын аныкталуу областы $y \in Y = [-1{,}1]$, маанилеринин областы $x \in R$ болот.

Ушундай эле жол менен $y = \cos x$, tgx, $ctgx$ – функцияларын кароо менен төмөндөгү функцияларды аныктайбыз.

А н ы к т о о. $y=\cos x$, tgx, $ctgx$ – функцияларына тескери функциялар, тиешелеш түрдө $y=\arccos x$, $artgx$, $arcctgx$ – (арккосинус, арктангенс, аркотангенс) деп аталат жана белгиленет.

Бул темада тескери функциянын аныктоосу гана берилди, бирок анын кандай шартта жашашы жөнүндөгү маселе каралган жок. Бул маселеге биз кийинчерээк кайрылабыз.

1.5. Татаал функция.

$y=f(x)$, $x\in X$, $x=\varphi(t)$, $t\in T$ функциялары берилсин. Биринчи функциядагы (аргумент) x тин оордуна $\varphi(t)$ ны коюу аркылуу $y=f(\varphi(t))$ функциясын алабыз. Бул процессти функциялардын суперпозициясы деп атайбыз.

А н ы к т о о. Функциялардын супперпозициясынын натыйжасында келип чыккан функцияны татаал функция деп атайбыз.

М и с а л ы. 1. $y=\sqrt{x}$, $x=1-t^2$ болсо, $y=\sqrt{1-t^2}$ татаал функцияга ээ болобуз.

2. $y=e^x$, $x=\sin t$; $y=e^{\sin t}$.

Бул аныктоонун жардамында элементардык функциялардын классын дагы да кеңейтүүгө болот.

Суперпозицияны чектүү түрдө колдонуу аркылуу, элементардык функциялардан түзүлгөн татаал функция да элементардык болот.

М и с а л ы. $y=e^x$, $x=\sin t$ болсо, $y=e^{\underbrace{\sin(\sin(\sin\ldots\sin t)}_{n\text{ жолу}}}$ элементардык функция болот; $y=e^{\sin(\sin(\sin\ldots)}$ элементардык боло албайт.

3.5. Натуралдык аргументүү функциялар

А н ы к т о о. $x=f(n)$, $n\in N$ функциясын, натуралдык аргументүү функция деп атайбыз.

Демек бул аныктоо боюнча натуралдык аргументүү функциянын аныкталуу областы ар дайым натуралдык сандардын көптүгү болот. Мындан сырткары ар бир натуралдык санга (n ге) функциянын ар бир $x(n)$ мааниси тиешелеш коюлгандыктан функциянын маанилерин $x(n)\equiv x_n$ деп номерлеп коюуга болот.

Айтылгандарды эске алсак берилген функцияны $x_n=f(n)$, функциянын маанилеринин көптүгүн $\{x_n\}$ деп белгилөө мүмкүнчүлүгүнө ээ болобуз.

М и с а л ы. 1. $x_n=\dfrac{1}{n}$, $n\in N$. 2. $x_n=\dfrac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}$, $n\in N$.

3. $x_n = q^n$, $n \in N$ $(q - const)$. 4. $x_n = \log_a n$, $n \in N$ $(a > 0)$.

4. Пределдер теориясы

4.1. Сандык удаалаштык

$x_n = f(n)$, $n \in N$ функциясы берилсин.

А н ы к т о о. $x_n = f(n)$ функциясынын маанилеринин көптүгү $\{x_n, n \in N\}$ сандык удаалаштык деп аталат.

М и с а л ы. $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$, $n \in N$ болсо, анда бул функция аркылуу аныкталган сандык удаалаштык $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{n}, n \in N\right\}$ болот.

Сандык удаалаштыкты $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ түрдө да жазууга болот. x_1 – удаалаштыктын биринчи, x_2 – экинчи, …, x_n – n-чи же жалпы мүчөсү деп аталат.

4.2. Сандык удаалаштыктын берилиш жолдору

Сандык удаалаштык төмөндөгү жолдордун бири аркылуу берилет:

1. $x_1, x_2, x_3, ...$ мүчөлөрү көрсөтүлөт, бирок n – мүчөсү көрсөтүлбөйт.

М и с а л ы. $1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, ...$

2. n – мүчөсү көрсөтүлөт, б.а. $x_n = f(n)$, $n \in N$.

М и с а л ы. $x_n = \dfrac{1}{n^2+1}$, $n \in N$.

3. n – мүчөнүн андан мурда келүүчү бир нече мүчөлөр менен байланыш формуласы келтирилет, б.а. $x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, .., x_1)$.

М и с а л ы. $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$, $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Удаалаштыктын мындай жол менен берилиши рекурренттик деп аталат.

4.3. Сандык удаалаштыктын предели

$\{x_n\}$ – сандык удаалаштык берилсин.

А н ы к т о о. 1. Каалаган $0 < \varepsilon$ – санын алалы.

2. Тандалып алынган ε санынан көз каранды болгон $n_0(\varepsilon) \in N$ номер жашасын.

3. Кандайдыр бир a саны жашап, удаалаштыктын $n > n_0$ барабарсыздыгын канааттандыруучу номерлерге туура келүүчү мүчөлөрү үчүн $|x_n - a| < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылсын.

Жогорудагы шарттар аткарылганда a саны $\{x_n\}$ удаалаштыгынын предели деп аталат,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ же } x_n \to a$$

түрдө белгиленет. $\{x_n\}$ удаалаштыгы a пределине ээ болсо, анда берилген удаалаштык a санына жыйналат деп да айтабыз.

$|x_n - a| < \varepsilon$ барабарсыздыгын (модулдун аныктоосу боюнча) төмөндөгү-дөй жаза алабыз.

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon, \; a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon .$$

Аныктоону жана алынган барабарсыздыкты эске алсак, анда төмөндөгү сүйлөмдү айтууга болот: «$n > n_0(\varepsilon)$ номердеги удаалаштыктын мүчөлөрү $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ интервалында жатат».

А н ы к т о о. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ интервалы a санынын ε чекебели (же жөн эле чекебели) деп аталат.

М и с а л. $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n \in N$ удаалаштыгы берилсин, $a = 0$ санын жана $\varepsilon = 0{,}1; 0{,}1; 0{,}001$ маанилерди алалы, $n_0(\varepsilon)$ номерлерди аныктайлы.

$\varepsilon = 0{,}1$: $|x_n - a| = \left|\dfrac{1}{n} - 0\right| = \dfrac{1}{n} < 0{,}1$ болсун. Мындан $n > 10$, $n_0(\varepsilon) = 10$;

$\varepsilon = 0{,}01$: $\dfrac{1}{n} < 0{,}01$ же $n > 100$, $n_0(\varepsilon) = 100$;

$\varepsilon = 0{,}001$: $\dfrac{1}{n} < 0{,}001$ же $n > 1000$, $n_0(\varepsilon) = 1000$.

$0 < \varepsilon$ – каалагандай сан болсун, анда $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ аткарылууга тийиш же $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, $n_0(\varepsilon) = E\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$ деп алсак болот.

Аныктоонун негизинде $a=0$ саны берилген удаалаштыктын предели. Биз бул мисалда a санын алдын ала (предел деп болжолдоп) алып, анын предели болоорун далилдедик.

Пратикада удаалаштык берилип, анын пределин табуу маселеси каралат. Бул маселенин жообун биз кийинки темаларда карайбыз.

4.4. Чексиз кичине чоңдуктар

А н ы к т о о. $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$ болсо, анда $\{\alpha_n\}$ чексиз кичине чоңдук (ч.к.ч.) деп аталат.

Удаалаштыктын пределинин аныктоосун колдонуп бул аныктоону төмөндөгүдөй да жазууга болот.

А н ы к т о о. Каалаган ε оң саны үчүн $n_0(\varepsilon)$ номери жашап, $n>n_0(\varepsilon)$ шартын канааттандыруучу номерлер үчүн $|\alpha_n|<\varepsilon$ аткарылса, $\{\alpha_n\}$ – (ч.к.ч.) деп аталат.

Төмөндөгү теорема пределдин жана ч.к.ч. ортосундагы байланышты туюнтат.

Т е о р е м а 5. 1. $\{x_n\}$ удаалаштык, a саны берилсин.

2. $\{\alpha_n\}$ – (ч.к.ч.) болсун.

3. $x_n-a=\alpha_n$ аткарылсын.

Бул шарттардын аткарылышы a саны $\{x_n\}$ удаалаштыгынын предели болушунун зарыл жана жетиштүү шарты болот.

Д а л и л д ө ө. 1. Зарыл шарт. a саны $\{x_n\}$ удаалаштыгынын предели болсун, б.а. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ аткарылсын. Пределдин аныктоосу боюнча $|x_n-a|<\varepsilon$ болот. $x_n-a=\alpha_n$ деп белгилесек, $|\alpha_n|<\varepsilon$, б.а. $\{\alpha_n\}$ – ч.к.ч.

2. Жетиштүү шарт. 1-3 шарт аткарылсын. $\{\alpha_n\}$ – ч.к.ч. болгондуктан, аныктоо боюнча $|\alpha_n|<\varepsilon$ болот же $|x_n-a|<\varepsilon$. Демек $\{x_n\}$ дин предели a. Теорема толугу менен далилденди.

4.5. Чексиз чоң чоңдуктар

$\{x_n\}$ берилсин. E – жетишээрлик чоң оң сан болсун.

А н ы к т о о. Каалагандай $0<E$ – саны үчүн $n_0(E)$ номери жашап, $n>n_0(E)$ номерге тиешелеш болгон $\{x_n\}$ – удаалаштыктын мүчөлөрү үчүн $|x_n|>E$ аткарылса, $\{x_n\}$ – чексиз чоң чоңдук (ч.ч.ч.) деп аталат.

М и с а л ы. $\{x_n = n^2 - n + 1,\ n \in N\}$, $E = 10^{10}$ берилсин. $n_0(E)$ номерин аныктайлы.

$x_n = n^2 - n + 1$ туюнтмасы $n \in N$ үчүн ар дайым оң болгондуктан

$$|n^2 - n + 1| = n^2 - n + 1 > 10^{10}.$$

Мындан $n^2 - n + 1 > 10^{10}$ же $n > \frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} + 10^{10}}$ шарты келип чыгат. Демек $n_0(E)$ деп $\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4} + 10^{10}}$ сандын бүтүн бөлүгүн алууга болот.

Чексиз кичине жана чексиз чоң чоңдуктардын ортосундагы байланыш төмөндөгү теорема аркылуу туюнтулат.

Т е о р е м а 6. $\{x_n\}$ – чексиз чоң чоңдук болсо, анда $\left\{\alpha_n = \frac{1}{x_n}\right\}$ – чексиз кичине чоңдук болот.

Д а л и л д ө ө. $\{x_n\}$ – ч.ч.ч. жана $0 < E$ – жетишээрлик чоң сан болсун. Ч.ч.ч. аныктоосу боюнча. $|x_n| > E$, мындан $\frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{E}$. $\frac{1}{|x_n|} = |\alpha_n|$, $\frac{1}{E} = \varepsilon$ деп белгилесек, $|\alpha_n| < \varepsilon$, б.а. $\{\alpha_n\}$ – ч.к.ч. Теорема далилденди.

4.6. Пределдер жөнүндөгү теоремалар

Пределдин айрым касиеттерин туюнткан төмөндөгү теоремаларды келтирели.

Т е о р е м а 7. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ жана $a > p$ $(a < q)$ болсун, анда кандайдыр бир номерден баштап $x_n > p$ $(x_n < q)$ болот.

Д а л и л д ө ө. Пределдин аныктоосу боюнча $n_0(\varepsilon)$ номери жашап, $n > n_0(\varepsilon)$ үчүн $|x_n - a| < \varepsilon$ аткарылат. Мындан $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ ээ болобуз. ε – каалагандай оң сан болгондуктан $\varepsilon < a - p$ шартын канааттандыра тургандай тандасак $n > n_0(\varepsilon)$ номерлер үчүн $x_n > p$ болот. Теорема далилденди.

Т е о р е м а 8. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ жана $x_n \le p$ $(x_n \ge q)$ болсун. Анда $a \le p$ $(a \ge q)$.

Да л и л д ө ө. Каршысынан жүргүзөлү. $a > p$ болсун. Пределдин аныктоосу боюнча $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ болгондуктан $\varepsilon = a - p > 0$ деп алсак $x_n > p$ ээ болобуз. Бул шартка каршы келет. Демек $a \le p$. Теорема далилденди.

Т е о р е м а 9. $\{x_n\}$ – удаалаштыгы пределге ээ болсо, анда ал жалгыз болот.

Д а л и л д ө ө. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ жана $a \neq b$ болсун. Тактык үчүн $a < b$ деп эсептейли. Чыныгы сандардын үзгүлтүксүздүк касиети боюнча $a < p < b$ боло тургандай p саны жашайт. Теорема 7 боюнча кандайдыр бир $n_0(\varepsilon)$ номерден баштап $x_n < p$ жана $x_n > p$ болууга тийиш. Бул барабарсыздыктардын аткарылышы мүмкүн эмес. Анда $a = b$. Теорема далилденди.

Т е о р е м а 10. $\{x_n\}$ пределге ээ болсо, анда ал чектелген болот.

Д а л и л д ө ө. Пределдин аныктоосун колдонсок $\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right)$ $n > n_0(\varepsilon)$ үчүн $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. $x_1, x_2, ..., x_{n_0}$ мүчөлөрдүн саны чектүү болгондуктан $m_0 \leq x_j \leq M_0$ $(j = 1,2,...,n_0)$ боло тургандай m_0 , M_0 сандары жашайт. $\max\{a - \varepsilon, m_0\} = m$, $\min\{a + \varepsilon, M_0\} = M$ деп алсак, анда удаалаштыктын баардык мүчөлөрү үчүн

$$m_0 \leq x_n \leq M_0.$$

Т е о р е м а 11. 1. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ берилсин жана каалаган $n \in N$ үчүн $x_n = y_n$.

2. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ болсун.

Бул шарттар аткарылганда $a = b$ болот.

Да л и л д ө ө. Каршысынан жүргүзөлү. $a \neq b$ же $a < b$ болсун. Дедекинддин теоремасынын негизинде $a < r < b$ боло тургандай $r \in R$ жашайт. Мындай болсо Теорема 7 боюнча кандайдыр бир номерден баштап $x_n < r < y_n$ аткарылууга тийиш. Демек кандайдыр бир номерден баштап $x_n < y_n$. Алынган барабарсыздык шартка каршы келет. Бул карама-каршылыктан теореманын тууралыгы келип чыгат.

Теорема 11 барабардыкта пределге өтүү мүмкүнчүлүгүн туюнтат.

Т е о р е м а 12. 1. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ жана каалаган $n \in N$ үчүн $x_n \leq y_n$ аткарлсын.

2. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ болсун.

Жогорудагы шарттар аткарылганда $a \leq b$ болот.

Теорема 12 Теорема 11 дей эле далилденет. Өз алдынча далилдөөнү сунуш кылабыз.

Т е о р е м а 13. 1. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ берилсин.

2. Каалаган $n \in N$ үчүн $x_n \leq y_n \leq z_n$ аткарылсын.

3. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ болсун.

Бул шарттар аткарылганда $\lim_{n\to\infty} y_n = a$ болот.

Да л и л д ө ө. Пределдин аныктоосун колдонсок каалаган $\varepsilon > 0$ үчүн, кандайдыр бир $n_0(\varepsilon)$ жашап, $n > n_0(\varepsilon)$ номерлер үчүн

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon$$

аткарылат. Демек

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon .$$

Алынган барабарсыздык $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ болоорун туюнтат. Теорема далилденди.

4.7. Чексиз кичине чоңдуктар жөнүндөгү леммалар

Л е м м а 3. Чектүү сандагы чексиз кичине чоңдуктардын суммасы чексиз кичине чоңдук болот.

Д а л и л д ө ө. Лемманы эки чексиз кичине чоңдук үчүн далилдейли (калган учурлар ушул учурга келтирилет).

$\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ – ч.к.ч. болсун. Аныктоо боюнча каалаган $\varepsilon > 0$ үчүн

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2},\ |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

болот. Экинчи жактан

$$|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Демек $\{d_n + \beta_n\}$ – ч.к.ч.

Л е м м а 4. Чексиз кичине чоңдуктун чектелген чоңдукка болгон көбөйтүндүсү чексиз кичине чоңдук болот.

Д а л и л д ө ө. $\{\alpha_n\}$ – ч.к.ч., $\{x_n\}$ – чектелген чоңдук болсун, б.а.

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0,\ m \le x_n \le M .$$

$L = \max\{|m|,|M|\}$ деп белгилейли, анда $|x_n| \le L$ болот. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ болгондуктан, каалаган $\varepsilon > 0$ үчүн $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{L}$. Анда

$$|\alpha_n \cdot x_n| \le |\alpha_n| \cdot |x_n| < \frac{\varepsilon}{L} \cdot L = \varepsilon ,\ |\alpha_n \cdot x_n| < \varepsilon .$$

Лемма далилденди.

4.8. Сумманын, көбөйтүндүнүн, тийиндинин предели

$\{x_n\}$, $\{y_n\}$ берилсин. $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ $(y_n \neq 0)$ удаалаштыктарды түзөлү. Түзүлгөн удаалаштыктардын пределин табуу маселесин коелу. Коюлган маселе төмөндөгүдөй теореманын жардамында чечилет.

Т е о р е м а 14. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ болсун, анда

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \pm b$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ болот.

Д а л и л д ө ө. Теореманын үчүнчү бөлүгүн далилдейли. Калгандары ушундай эле далилденет.

Шарт боюнча $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ $(b \neq 0)$ болгондуктан предел жана чексиз кичине чоңдуктун ортосундагы байланышты эске алсак

$$x_n - a = \alpha_n \text{ – ч.к.ч.; } y_n - b = \beta_n \text{ – ч.к.ч.}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ болоорун далилдөө үчүн $\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{a}{b} = \gamma_n$ – ч.к.ч. болоорун далилдөө жетиштүү болот.

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha_n b - \beta_n a}{b(b+\beta_n)}.$$

$(\alpha_n b - \beta_n a)$ – лемма 3,4 боюнча ч.к.ч.

Шарт боюнча $b \neq 0$. $b > 0$ деп эсептейли. r $(b > r > 0)$ санын алалы. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b > r$ болгондуктан, кандайдыр бир номерден баштап $y_n > r$ болот.

Айтылгандарды эске алсак

$$\frac{1}{b \cdot y_n} = \frac{1}{b(b+\beta_n)} < \frac{1}{b \cdot r}.$$

Демек $\dfrac{1}{b(b+\beta_n)}$ чектелген чоңдук. Жыйынтыктап айтканда лемма 4 боюнча $\dfrac{\alpha_n b-\beta_n a}{b(b+\beta_n)}$ – ч.к.ч., б.а. $\dfrac{x_n}{y_n}-\dfrac{a}{b}$ – ч.к.ч.

Өз алдынча теореманын башка бөлүктөрүн далилдегиле.

4.9. Аныксыздыктар

$\{x_n\}$, $\{y_n\}$ берилсин. $x_n \pm y_n$, $x_n \cdot y_n$, $\dfrac{x_n}{y_n}$ туюнтмаларын түзөлү.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ болсо, анда $\dfrac{x_n}{y_n}$ туюнтмасы $\dfrac{0}{0}$ аныксыздыгын берет.

Чындыгында $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{2n+1}$ болсун, анда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2.$$

$x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $y_n = \dfrac{1}{3n}$ болсун, анда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0.$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ болсо, $\dfrac{x_n}{y_n}$ туюнтмасы $\dfrac{\infty}{\infty}$ аныксыздыгын берет.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ болсо, $x_n \cdot y_n$ туюнтмасы $0\cdot\infty$ аныксыздыгын туюнтат.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ болсо, $x_n + y_n$ туюнтмасы $\infty-\infty$ аныксыздыгын туюнтат.

Жогорудагы аныксыздыктардан сырткары $0^{\infty}, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{\infty}, \infty^{0}, 0^{\infty}$ ж.б. аныксыздыктар жашайт.

Практикада анысыздыктар учураса, анда бул аныксыздыктарды берген туюнтмаларды өзгөртүп түзүү аркылуу аныксыздыктын маанисин табуу (ачуу) талап кылынат.

Аныксыздыктарды ачуунун айрым жолдору менен кийинчерээк таанышабыз.

4.10. Монотондук удаалаштыктын предели

Пределинин жашашын тастыктоого мүмкүн болгон удаалаштыктардын классын бөлөлү. Бул максатта төмөндөгүдөй аныктоону киргизели.

А н ы к т о о. $\{x_n\}$ – удаалаштыгы берилсин. $\forall n \in N$:

1. $x_{n+1} > x_n \;\Rightarrow\; \{x_n\}$ – өсүүчү;

2. $x_{n+1} < x_n \;\Rightarrow\; \{x_n\}$ – кемүүчү;

3. $x_{n+1} \geq x_n \;\Rightarrow\; \{x_n\}$ – кемибөөчү;

4. $x_{n+1} \leq x_n \;\Rightarrow\; \{x_n\}$ – өспөөчү деп аталат.

1-4 пункттарда аныкталган удаалаштыктар монотондук деп аталышат.

Монотондук удаалаштыктын пределинин жашашын төмөндөгү теорема тастыктайт.

Т е о р е м а 15. 1. $\{x_n\}$ – өсүүчү (кемүүчү). 2. $\{x_n\}$ – жогор (төмөн) жагынан чектелген.

Бул шарттар аткарылганда $\{x_n\}$ удаалаштыгынын предели жашайт.

Д а л и л д ө ө. Теореманын 2-шарты боюнча боюнча $\{x_n\}$ көптүгү жогор жагынан чектелген, б.а. $\forall n \in N : x_n \leq M$. Мындай болгондо $\sup\{x_n\} = a$ болот. Нак жогорку чектин аныктоосу боюнча каалаган $\varepsilon > 0$ үчүн бул көптүктүн жок дегенде бир x_{n_0} элементи жашап $a - \varepsilon < x_{n_0} < a$ барабарсыздыгы аткарылат.

1-шарт боюнча $\{x_n\}$ өсүүчү болгондуктан $\forall n > n_0$ номер үчүн да $a - \varepsilon < x_n < a$ болот.

Демек

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0(\varepsilon) \;\wedge\; \forall n > n_0(\varepsilon) : \left| x_n - a \right| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \lim_{n \to \infty} x_n = a .$$

Теорема далилденди.

Э с к е р т ү ү. Далилденген теорема пределдин жашашын гана ырастайт, бирок аны табуунун жолун көрсөтпөйт. Практикалык маселелерди чыгарууда пределдин жашашын гана көрсөтүү көпчүлүк учурларда манилүү маселелердин бири болуп эсептелет.

4.11. Камтылган аралыктар жөнүндө түшүнүк

$A = \{[a_n, в_n],\; n \in N,\; a_n,\; b_n \in R\}$ көптүгү берилсин.

А н ы к т о о. $\forall n \in N : [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \;\Rightarrow\; A$ – камтылган аралыктар деп аталган.

М и с а л ы. 1. $A=\left\{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right], n\in N\right\}$.

2. A көптүгүн төмөндөгүдөй түзөлү.

[0,1] аралыгын тең экиге бөлөлү жана каалаган бөлүктү алалы. Алынган бөлүкчөнү тең экиге бөлүп, каалаган бөлүктү алалы. Бул процессти чексиз уланталы. Натыйжада камтылган аралыктарга ээ болобуз.

4.12. Камтылган аралыктар жөнүндүгү лемма

A көптүгү берилсин. Бул көптүктүн аныктоосунан $\forall n\in N:\quad a_n\le a_{n+1}<b_{n+1}<b_n$ $(a_n<a_{n+1}<b_{n+1}\le b_n)$ болоору келип чыгат.

Л е м м а 5 (камтылган аралыктар жөнүндө). 1. A берилсин.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

Бул шарттар аткарылганда $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$ болот.

Д а л и л д ө ө. Шарт боюнча A көптүгү камтылган аралыктардын көптүгү. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ удаалаштыктарын түзөлү. $\{a_n\}$ – өсүүчү жана жогор жагынан $\{b_n\}$ удаалаштыгынын каалаган мүчөсү менен чектелет. Ошондой эле $\{b_n\}$ – кемүүчү жана төмөн жагынан $\{a_n\}$ удаалаштыгынын каалаган мүчөсү менен чектелет. Демек $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ удаалаштыктары монотондук удаалаштыктын предели жөнүндөгү теореманын шарттарын канааттандырат, б.а.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=c_1,\ \lim_{n\to\infty}b_n=c_2$$

жашайт.

Теореманын экинчи шартын жана $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ удаалаштыктарынын пределдеринин жашашын эске алып (b_n-a_n) туюнтмасына сумманын предели жөнүндөгү теореманы колдонсок

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}b_n-\lim_{n\to\infty}a_n=c_2-c_1=0.$$

Мындан $c_2=c_1=c$.

4.13. *e* саны

$\left\{x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n\in N\right\}$ удаалаштыгы берилсин.

Т е о р е м а 16. $\lim_{n\to\infty} x_n$ – предели жашайт.

Д а л и л д ө ө. Теореманы далилдөө үчүн $\{x_n\}$ удаалаштыгы өсүүчү жана жогор жагынан чектелгендигин далилдейли.

1. $\forall n \in N : x_n < x_{n+1}$ болоорун далилдейли. $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ туюнтмасын Ньютондун биному боюнча ажыратып жазалы.

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k}.$$

$$\frac{n}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{(n-k)!(n-k+1)(n-k+2)\cdot \ldots \cdot n}{n! \cdot n^k} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1)}{n}\right)\left(1-\frac{k-2)}{n}\right)\cdot \ldots \cdot 1.$$

$$x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \cdot \frac{1}{n^{k+1}}.$$

$$\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\left(1-\frac{k-2)}{n}\right)\cdot \ldots \cdot 1.$$

$C_n^k \cdot \frac{1}{n^k}$, $C_{n+1}^k \cdot \frac{1}{(n+1)^k}$ туюнтмаларын салыштырсак $1-\frac{k-1}{n} < 1-\frac{k-1}{n+1}$ болгондуктан экинчи туюнтма биринчисине караганда чоң болот. Андыктан жогорудагы суммалардын экинчисинин $(n+1)$ мүчөсү биринчисинин алгачкы $(n+1)$ мүчөсүнө караганда чоң болот. Мындан сырткары ашыкча, оң $(n+2)$ – кошулуучусу болот.

Демек $x_n < x_{n+1}$.

2. $\{x_n\}$ – дин жогор жагынан чектелгендигин далилдейли.

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\cdot \ldots \cdot 1$$

суммасын алалы жана бул суммада $\left(1-\frac{j}{n}\right) \le 1$ болгондуктан мындай көбөйтүүчүлөрдүн баарын бир саны менен алмаштыралы, анда

$$x_n \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1\cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} < \frac{1}{2^{k-1}}$ болгондуктан

$$x_n < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}} < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+... < 2+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2+1 = 3,\ x_n < 3.$$

Жыйынтыктап айтканда $\{x_n\}$ – монотондук өсүүчү жана жогор жагынан чектелген. Демек бул удаалаштыктын предели жашайт. Теорема далилденди.

А н ы к т о о. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ деп белгилейли.

$e = 2{,}718281828459045...$. e – ирационалдык сан болуп эсептелет.

4.14. Жекече удаалаштыктар жана алардын жыйналуучулугу

$\{x_n\}$ берилсин. $\{1,2,3,...,n,...\}$ көптүктөн $\{n_1, n_2, ..., n_к, ...\}$ чексиз бөлүкчө көптүктү бөлүп алалы. $\{x_n\}$ удаалаштыгынан бул номерлерге туура келген мүчөлөрдү алуу менен $\{x_{n_k}\}$ удаалаштыгын түзөлү.

А н ы к т о о. $\{x_{n_k}\}$ удаалаштыгы $\{x_n\}$ удаалаштыгынын бөлүкчө удаалаштыгы деп аталат.

М и с а л. $\left\{x_n = \frac{1}{n},\ n \in N\right\}$ берилсин.

1. n – жуп маанилерди кабыл алат деп эсептеп $\left(x_{n_k} = \frac{1}{2k},\ k \in N\right)$ удаалаштыкты түзөлү.

2. n – так маанилерди кабыл алат деп эсептеп $\left(x_{n_k} = \frac{1}{2k-1},\ k \in N\right)$ удаалаштыкты түзөлү.

3. $\left\{x_n = \frac{1}{n},\ n \in N\right\}$ удаалаштыгында эсептөөнү биринчи мүчөдөн баштап, ар бир үчүнчү мүчөнү алып таштоо аркылуу удаалаштык түзөлү: $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, ...\right\}$.

Түзүлгөн удаалаштыктар жекече удаалаштыктар болуп эсептелишет.

Т е о р е м а 17. 1. $\{x_n\}$ удаалаштыгы пределге ээ болсо, анда $\{x_{n_k}\}$ удаалаштыгы да ошол эле пределге ээ болот.

2. $\{x_n\}$ удаалаштыгы пределге ээ болбосо да $\{x_{n_k}\}$ пределге ээ болушу мүмкүн.

Д а л и л д ө ө. 1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ болсун. Пределдин аныктоосу боюнча

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \ \wedge \ n > n_0(\varepsilon) : |x_n - a| < \varepsilon .$$

$\{n_k\}$ – чексиз көптүк болгондуктан $n_k > n_0(\varepsilon)$ номерлер жашап $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$ болот. Демек $\lim\limits_{n_k\to\infty} x_{n_k} = a$.

2. Теореманын бул бөлүгүн далилдөө үчүн мисал келтирүү жетиштүү болот.

$\left\{1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, 7, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$ удаалаштыкты алалы.

Бул удаалаштыктын предели жашабайт. Чындыгында кандай гана жетишээрлик чоң $E > 0$ санын албайлы бул сандан чоң боло турган удаалаштыктын мүчөлөрү жашайт. Экинчи жактан кандай гана жетишээрлик кичине $\varepsilon > 0$ санын албайлы бул сандан да кичине боло турган удаалаштыктын мүчөлөрү жашайт. Аталган себептер (далилдер) удаалаштыктын пределинин жашабай тургандыгын далилдейт.

$\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ жекече удаалаштыктын предели $+\infty$, ал эми $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$ жекече удаалаштыктын предели 0 болот.

Төмөндөгүдөй суроонун келип чыгышы табигый:

Кандай шартта предели жашабаган удаалаштыктан пределге ээ боло турган бөлүкчө удаалаштыкты бөлүп алууга болот? Бул суроого төмөндөгүдөй лемма жооп берет.

Л е м м а 6 (Больцано-Вейерштрасс). Каалагандай чектелген удаалаштыктан чектүү пределге ээ боло турган бөлүкчө удаалаштыкты бөлүүгө болот.

Д а л и л д ө ө. $\{x_n\}$ удаалаштыгы берилсин жана $\forall n \in N : a \le x_n \le b$ (чектелгендин шарты) болсун.

$[a, b]$ аралыгын тең экиге бөлөлү жана берилген удаалаштыктын чексиз көп мүчөсүн камтыган бөлүктү $[a_1, b_1]$ деп бедгилейли (мындай бөлүк сөзсүз түрдө жашайт). Бул аралыктан удаалаштыктын x_{n_1} мүчөсүн алалы. $[a_1, b_1]$ тең экиге бөлөлү жана берилген удаалаштыктын чексиз көп мүчөсүн камтыган бөлүгүн $[a_2, b_2]$ деп белгилейли. $[a_2, b_2]$ ден x_{n_1} ден айрымалуу болгон x_{n_2} мүчөсүн алалы. Процессти k жолу кайталагандан кийин $[a_k, b_k]$ аралыгына жана андан алынган x_{n_k} мүчөгө ээ болобуз. Түзүү боюнча $\{[a_k, b_k]\}$ аралыктар камтылган аралыктар болуп эсептелишет. Экинчи жактан бул аралыктардын узундуктары $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$ болуп $k \to \infty$ 0 умтулат.

Демек $\lim b_k = \lim a_k = c$. Экинчи жактан $a_k \le x_{n_k} \le b_k$ болгондуктан $\lim x_{n_k} = c$. Лемма далилденди.

4.15. Жыйналуучулук принциби.

$\{x_n\}$ удаалаштыгы берилсин. Жалпы учурда берилген удаалаштыктын пределинин жашоо шарттарын аныктоо маселесин коелу. Коюлган маселе төмөндөгүдөй теорема аркылуу чечилет.

Т е о р е м а 18. Каалаган $\varepsilon > 0$ үчүн $n_0(\varepsilon)$ номери жашап, каалагандай $n, m > n_0(\varepsilon)$ номерлер үчүн $|x_n - x_m| < \varepsilon$ барабарсыздыгынын аткарылышы $\lim x_n$ дин жашашынын зарыл жана жетиштүү шарты болот.

Математикалык символдордун жардамында бул теореманы төмөндөгүдөй жазууга болот.

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists n_0(\varepsilon) \;\wedge\; n,m > n_0(\varepsilon) : |x_n - x_m| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \lim x_n = a .$$

Д а л и л д ө ө. Зарыл шарт. $\lim x_n = a$ жашасын пределдин аныктоосу боюнча

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists n_0(\varepsilon) \;\wedge\; n,m > n_0(\varepsilon) : |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},\; |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; |x_n - x_m| = |x_n - a - x_m + a| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon .$$

Жетиштүү шарт. $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists n_0(\varepsilon) \;\wedge\; n,m > n_0(\varepsilon) : |x_n - x_m| < \varepsilon$.

$|x_n - x_m| < \varepsilon$ барабарсыздыгын алалы. m ди бекемдейли, $m = m_0$.

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \;\Rightarrow\; x_{m_0} - \varepsilon < x_n < x_{m_0} + \varepsilon .$$

Бул барабарсыздыкты удаалаштыктын $n > n_0(\varepsilon)$ номерлерине тиешелеш болгон мүчөлөрү канааттандырат. Берилген удаалаштыктын алгачкы (чектүү сандагы) $x_1, x_2, ..., x_{n_0}$ мүчөлөрү гана бул чек арага кирбей калат. Бирок бул чек араны $\min\{x_1, x_2, ..., x_{m_0} - \varepsilon\}$, $\max\{x_1, x_2, ..., x_{m_0} + \varepsilon\}$ сандарын алуу менен кеңейтүүгө болот.

Демек $\{x_n\}$ удаалаштыгы чектелген. Анда Больцано-Вейерштрасстын леммасы боюнча $\{x_n\}$ удаалаштыгынан чектүү пределге ээ боло турган $\{x_{n_k}\}$ удаалаштыкты бөлүүгө болот, б.а. $\lim x_{n_k} = a$ жана

$$n_k > n_0(\varepsilon) \;\vee\; |x_{n_k} - a| < \varepsilon \;\Rightarrow\; a - \varepsilon < x_{n_k} < a + \varepsilon .$$

$|x_n - x_m| < \varepsilon$ барабарсыздыгында $m = n_k$ деп алалы, анда

$$x_{n_k} - \varepsilon < x_n < x_{n_k} + \varepsilon \;\Rightarrow\; a - 2\varepsilon < x_n < a + 2\varepsilon \;\vee\; |x_n - a| < 2\varepsilon \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} x_n = a .$$

Теорема далилденди.

5. Функциянын пределинин теориясы

5.1. Функциянын пределинин аныктоосу

$y = f(x)$, $x \in X$ берилсин.

А н ы к т о о. a чекитинин каалагандай $(a-\delta, a+\delta)$ чекебелинде X көп-түгүнүн a дан айырмалуу элементтери жашаса, анда a чекити X көптүгүнүн пределдик чекити деп аталат.

М и с а л ы. 1. $X = [a,b]$ берилсин. a чекитин алсак, анда a, X үчүн пределдик чекит боло алат жана $a \in X$.

2. $X = (a,b]$. a чекитин алалы. Бул учурда да a, X үчүн пределдик чекит жана $a \notin X$

Келтирилген мисалдардан пределдик чекит, көптүккө таандык же таандык болбой да калуу мүмкүнчүлүктөрү келип чыгат.

А н ы к т о о. $\exists \delta > 0 \wedge (a-\delta, a+\delta) \subset X \Rightarrow a$, X көптүгүнүн ички чекити деп аталат.

Эки аныктоодон төмөндөгү сүйлөмдүн тууралыгы келип чыгат.

Т е о р е м а 18. Каалагандай ички чекит пределдик чекит болот. Бул сүйлөмгө тескери сүйлөм ар дайым эле туура боло бербейт.

Бул теореманы өз алдынча далилдөөнү окурманга сунуш кылабыз.

Т е о р е м а 19. a, X көптүгүнүн пределдик чекити болсун. Анда X көптүгүнүн элементтеринен чексиз көп түрдүү жол менен a га жыйналуучу $\{x_n\}$ удаалаштыктарды түзүүгө болот.

Д а л и л д ө ө. a, X көптүгүнүн пределдик чекити болсун $\{\delta_n > 0\} \wedge \lim \delta_n \to 0$ удаалаштыктыкты алалы. $(a-\delta_n, a+\delta_n)$ чекебелинен X көптүгүнө таандык болгон x_n элементти алалы. Натыйжада $\{x_n\}$ удаалаштыгына ээ болобуз. Түзүү боюнча

$$a-\delta_n \le x_n \le a+\delta_n.$$

Мындан $\lim x_n = a$ болоору келип чыгат.

А н ы к т о о (Гейне). 1. a чекити X тин пределдик чекити болсун.

2. $\{x_n\} \to a$ боло тургандай каалагандай удаалаштыкты алалы жана $\{f(x_n)\}$ удаалаштыгын түзөлү.

Эгерде $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ болсо, анда A саны $f(x)$ функциясынын $x \to a$ гы (a чекитиндеги) предели деп аталат.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

түрдө белгиленет.

Бул аныктоо функциянын пределинин удаалаштык тилиндеги же Гейне боюнча аныктоосу деп аталат.

Функциянын пределинин аныктоосун төмөндөгүдөй түрдө да айтууга болот.

А н ы к т о о (Коши). Каалаган $\varepsilon > 0$ үчүн кандайдыр бир $\delta(\varepsilon) > 0$ жашап жана $|x-a| < \delta$ барабарсыздыгын канаттындыруучу x тер үчүн $|f(x) - A| < \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарылса, анда A саны $f(x)$ функциясынын a чекитиндеги предели деп аталат. Белгилөө жогорудагыдай эле болот.

Бул аныктоо пределдин "$\varepsilon - \delta$" тилиндеги же Коши боюнча аныктоосу деп аталат.

Т е о р е м а 20. Функциянын пределинин Гейне жана Коши боюнча аныктоолору тең күчтө болот.

Д а л и л д ө ө. 1. Коши боюнча аныктоо берилсин. Бул аныктоонун негизинде Гейне боюнча аныктоону келтирип чыгаралы.

Кошинин аныктоосу боюнча

$$\forall\varepsilon > 0 \;\exists\delta(\varepsilon) > 0 \;\wedge\; |x-a| < \delta : |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Демек $\{x_n\} \to a$ боло тургандай кандай гана удаалаштык болбосун $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ болот, б.а. $\lim f(x_n) = A$.

Гейне боюнча аныктоо берилсин. Коши боюнча аныктоо аткарылбасын. Мындай болгондо кандайдыр бир $\varepsilon > 0$ үчүн кандай гана $\delta > 0$ албайлы жок дегенде $|x_0 - a| < \delta$ болгондо $|f(x_0) - A| \geq \varepsilon$ боло тургандай бир $x = x_0$ маани жашайт.

$\{\delta_n > 0\} \to 0$ удаалаштыгын алалы. Айтылган боюнча ар бир δ_n үчүн туура келген $x = x_{0n}$ маанилерди алуу менен $\{x_{0n}\}$ удаалаштыгын түзөлү. Түзүү боюнча $|x_{0n} - a| < \delta_n$, б.а. $\{x_{0n}\} \to a$. $\{x_{0n}\}$ ге тиешелеш келген $f(x)$ функциясынын маанилеринин $\{f(x_{0n})\}$ удаалаштыгын карайлы. Гейненин аныктоосу боюнча $\{f(x_{0n})\} \to A$ болууга тийиш, бирок түзүү боюнча $|f(x_{0n}) - A| \geq \varepsilon$ болгондуктан мындай болушу мүмкүн эмес. Алынган карама-каршылык теореманын тууралыгын ырастайт. Теорема толугу менен далилденди.

Жогорудагы аныктоолордогу a саны $\pm\infty$ болгон учурларды кароону окурманга калтырабыз.

5.2. Бир жактуу пределдер

Биз жогоруда $x \to a$ да $f(x)$ функциясынын пределин аныктоодо x тин a умтулуусунун түзүлүшүн (структурасын) тактаганыбыз жок. Айрым учурларда бул маселени тактоо талап кылынат. Анализдеп көрсөк, $x \to a$ да төмөндөгү-дөй мүмкүнчүлүктөр бар:

1. x өзгөрүлмөсү a га бул сандан кичине маанилерди кабыл алуу менен умтулат;

2. x өзгүрүлмөсү a га бул сандан чоң маанилерди кабыл алуу менен умтулат;

3. x өзгөрүлмөсү a га бул сандан чоң да, кичине да маанилерди кабыл алуу менен умтулат.

1-2 учурларды бөлүп алуу менен функциянын пределин аныктайлы.

$y = f(x)$, $x \in X$ берилсин. a, X тин пределдик чекити болсун.

А н ы к т о о (Гейне). 1. $\{x_n\} \to a$ жана $x_n < a$ шартын канааттандырган каалагандай удаалаштык болсун.

2. $\{f(x_n)\}$ удаалаштыгын түзөлү.

$\lim f(x_n) = A$ болсо, анда A саны $f(x)$ функциясынын a чекитиндеги сол жактуу предели деп аталат,

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A$$

түрүндө белгиленет.

Ушундай эле аныктоону оң жактуу предел үчүн да айтууга болот (бул учурду кароону окурманга калтырабыз). Оң жактуу предел

$$\lim_{x \to a+0} f(x_n) = A$$

деп белгиленет.

А н ы к т о о (Коши). $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \wedge \;\; \forall x \in (a-\delta, a) : \left| f(x) - A \right| < \varepsilon \;\; \Rightarrow \;\; A$ саны $f(x)$ функциясынын a чекитиндеги сол жактуу предели деп аталат.

Оң жактуу предел ушундай эле аныкталат.

М и с а л д а р. 1. $f(x) = x^2$ функциясынын $x = 1$ чекитиндеги бир жактуу пределин тапкыла.

$$\lim_{x \to 1-0} x^2 = 1, \;\; \lim_{x \to 1+0} x^2 = 1.$$

2. $g(x) = \begin{cases} x, \; x < 0; \\ x - 1, \; x > 0. \end{cases}$

$x=0$ чекитинде бир жактуу пределдерди табалы.

$$\lim_{x\to 0-0} g(x) = \lim_{x\to 0-0} x = 0, \ \lim_{x\to 0+0} g(x) = \lim_{x\to 0+0} (x-1) = -1.$$

Каралган мисалдар көрсөтүп жаткандай бир жактуу пределдер ар дайым эле барабар болбойт.

Төмөндөгү теорема бир жактуу жана функциянын пределдеринин ортосундагы байланышты туюнтат.

Т е о р е м а 21. 1. $\lim_{x\to a-0} f(x)$, $\lim_{x\to a+0} f(x)$ жашасын

2. $\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x)$

Бул шарттардын аткарылышы $\lim_{x\to a} f(x)$ жашашынын зарыл жана жетиштүү шарты болот.

Д а л и л д ө ө. Зарыл шарт. $\lim_{x\to a} f(x) = A$ жашасын. Пределдин аныктоосу боюнча $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$ үчүн же $a-\delta < x < a+\delta$: $|f(x)-A| < \varepsilon$ аткарылат. Мындан

$$\left(a-\delta < x < a : |f(x)-A| < \varepsilon\right) \quad \wedge \quad \left(a < x < a+\delta : |f(x)-A| < \varepsilon\right)$$

болоору келип чыгат. Демек $\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x)$.

2. Жетиштүү шарт.

$\lim_{x\to a-0} f(x)$, $\lim_{x\to a+0} f(x)$ болсун. Бир жактуу пределдин аныктоосунун негизинде

$$a-\delta < x < a: \ |f(x)-A| < \varepsilon, \ a < x < a+\delta: \ |f(x)-A| < \varepsilon.$$

Барабарсыздыктарды бириктирсек

$$|x-a| < \delta: \ |f(x)-A| < \varepsilon \ \Rightarrow \ \lim_{x\to a} f(x) = A.$$

5.3. Пределдер жөнүндөгү теоремалар

$y = f(x)$, $x \in X$ функциясы берилсин жана a, X көптүгүнүн пределдик чекити болсун.

Төмөндөгү теоремалар туура болот.

Т е о р е м а 22. $\lim_{x\to a} f(x) = A \ \wedge \ A > p \ \ (A < q)$ болсо, анда a чектиинин кандайдыр бир чекебелиндеги x тер үчүн $f(x) > p \ \ (f(x) < q)$ болот.

Т е о р е м а 23. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A \wedge x\in(a-\delta,a+\delta)$: $f(x)\le p$ $(f(x)\ge q)$ $\Rightarrow$ $A\le p$ $(A\ge q)$.

Т е о р е м а 24. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A \wedge \lim\limits_{x\to a} f(x)=B \Rightarrow A=B$.

Т е о р е м а 25. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A \Rightarrow x\in(a-\delta,a+\delta)$: $m\le f(x)\le M$.

Т е о р е м а 26. $\forall x\in(a-\delta,a+\delta)$: $f(x)=g(x) \wedge \lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B \Rightarrow A=B$.

Т е о р е м а 27. $\forall x\in(a-\delta,a+\delta)$: $f(x)\ge g(x) \wedge \lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B \Rightarrow A\ge B$.

Т е о р е м а 28. $\forall x\in(a-\delta,a+\delta)$: $f(x)\le g(x)\le\varphi(x) \wedge \lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x)=A$.

Айтылган теоремалардын далилдөөлөрү функциянын пределинин аныктоосунун негизинде жүргүзүлөт.

Теорема 24 тү далилдейли. Далилдөөнү каршысынан жүргүзөлү, б.а. $A\ne B$ болсун. Тактык үчүн $A<B$ деп алалы. Чыныгы сандардын үзгүлтүксүздүгү боюнча $A<r<B$ боло тургандай r саны жашайт.

Теорема 22 боюнча $\forall x\in(a-\delta,a+\delta)$: $f(x)<r$ жана $f(x)>r$ болот. Бул карама-каршылыктан теореманын тууралыгы келип чыгат.

5.4. Чексиз кичине жана чексиз чоң чоңдуктар

А н ы к т о о. $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ болсо, анда $\alpha(x)$ – чексиз кичине функция (ч.к.ф.) деп аталат.

Бул аталган аныктоону Гейне жана Коши боюнча да айтууга болот.

А н ы к т о о (Коши). $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta(\varepsilon)>0 \wedge \forall x\in(a-\delta,a+\delta)$: $|\alpha(x)|<\varepsilon \Rightarrow \alpha(x)$ – ч.к.ф. деп аталат.

М и с а л ы 1. $\alpha(x)=\sin x \wedge \lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$. Демек $\sin x$ функциясы $x=0$ чекитинин чекебелинде чексиз кичине функция.

2. $\alpha(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, $a=1$. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=0$. Берилген функция $a=1$ чекитинин кандайдыр бир чекебелинде гана чексиз кичине боло алат. Маселен x тин маанилери (–1) ге жакындаганда функциянын маанилеринин өзгөрүшүн байкайлы, б.а.

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{x-1}{x+1}=+\infty,\ \lim_{x\to -1+0}\frac{x-1}{x+1}=-\infty.$$

Төмөндөгү леммалар чексиз кичине функциялардын касиеттерин туюнтат.

Л е м м а 7. $\alpha_k(x)$ $(k=1,2,...,n)$ ($x\to a$ да) – ч.к.ф. $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x)$ – ч.к.ф. болот.

Л е м м а 8. $\alpha(x)$ – ч.к.ф. $\wedge$ $m\le f(x)\le M$ $\Rightarrow$ $\alpha(x)\cdot f(x)$ – ч.к.ф.

Бул леммалардын далилдөөлөрү удаалаштык учурундагыдай эле жүргү-зүлөт. Өз алдынча далилдөөнү окурмандарга сунуш кылабыз.

Т е о р е м а 29. $\lim_{x\to a} f(x)=A$ $\Rightarrow$ $(f(x)-A)$ – ч.к.ф.

А н ы к т о о. $\forall E>0$ $\exists\delta>0$ $\wedge$ $\forall x\in(a-\delta,a+\delta)$: $|f(x)|>E$ $\Rightarrow$ $f(x)$ – функциясы a чекитинде чексиз чоң функция деп аталат.

А н ы к т о о. $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ $\Rightarrow$ $f(x)$ – ч.ч.ф. деп аталат.

Төмөндөгү теорема чексиз кичине жана чексиз чоң фукциялардын ортосундагы байланышты туюнтат.

Т е о р е м а 30. $f(x)$ – ч.ч.ф. $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{f(x)}=\alpha(x)$ – ч.к.ф. болот.

Д а л и л д ө ө. $f(x)$ – ч.ч.ф. $\Rightarrow$ $\forall E>0$ $\exists\delta>0$ $\wedge$ $\forall x\in(a-\delta,a+\delta)$: $|f(x)|>E$. $\dfrac{1}{f(x)}=\alpha(x)$, $\dfrac{1}{E}=\varepsilon$ деп белгилейли. Анда $|\alpha(x)|<\varepsilon$ барабарсыздыгы $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ $\wedge$ $\forall x\in(a-\delta,a+\delta)$ үчүн аткарылат, б.а. $\alpha(x)$ – ч.к.ф.

5.5. Сумманын, көбөйтүндүнүн, тийиндинин предели

$f(x)$, $g(x)$, $x\in X$ функциялары берилип, a X тин пределдик чекити болсун.

Т е о р е м а 31. $\lim_{x\to a} f(x)=A$, $\lim_{x\to a} g(x)=B$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1. $\lim_{x\to a}\big(f(x)\pm g(x)\big)=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$;

2. $\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$;

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ $\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0\right)$.

Д а л и л д ө ө. 3-учурду далилдейли. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$ болоорун далилдөө үчүн $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{A}{B}\right)$ – ч.к.ф. экендигин далилдөө жетиштүү.

$$\lim_{x\to a} f(x)=A,\ \lim_{x\to a} g(x)=B \Rightarrow \left(f(x)-A\right)=\alpha(x),\ \left(g(x)-B\right)=\beta(x) \text{ – ч.к.ф.}$$

$$f(x)=A+\alpha(x),\ g(x)=B+\beta(x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\frac{A}{B}=\frac{\alpha(x)\cdot B-A\cdot\beta(x)}{B\left(B+\beta(x)\right)}.$$

Лемма 7,8 боюнча $\alpha(x)\cdot B-A\cdot\beta(x)$ – ч.к.ф. Шарт боюнча $B\neq 0$. Тактык үчүн $B>0$ деп эсептейли, анда $B>r>0$ боло тургандай r саны жашайт $\beta(x)$ – ч.к.ф. болгондуктан r ди $B+\beta(x)>r$ боло тургандай тандай алабыз ($-\varepsilon<\beta(x)<\varepsilon \Rightarrow B-\varepsilon<\beta(x)+B<B+\varepsilon \Rightarrow B-\varepsilon>r$ деп алуу жетиштүү).

Демек

$$\frac{1}{B\left(B+\beta(x)\right)}<\frac{1}{B\cdot r}.$$

$\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{A}{B}\right|<\dfrac{1}{B\cdot r}\cdot\left|\alpha(x)\cdot B-A\cdot\beta(x)\right|$ – ч.к.ф. лемма 8 боюнча.

5.6. Аныксыздыктар

Сан удаалаштыктардын пределдерин эсептөө учурундагыдай эле, функциялардын пределдерин эсептөөдө да $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, 1^{∞}, 0^{0}, 0^{∞}, ∞^{0}, $\infty-\infty$ түрдөгү аныксыздыктар кездешет.

М и с а л ы. 1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)$.

2. $f(x)=x-1$, $g(x)=x^3-1$ берилсин. $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$, $\lim\limits_{x\to 1}(x^3-1)=0$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^3-1}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1}{3}.$$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

5.7. Биринчи сонун предел

Т е о р е м а 32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

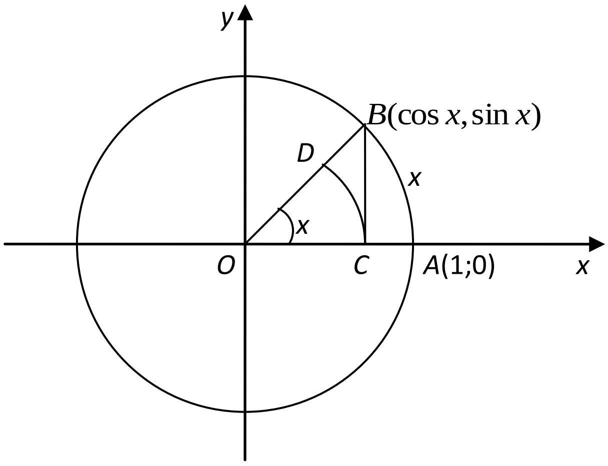
Д а л и л д ө ө. $\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1$. $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ болгон учурду кароо жетиштүү.

ODC, OAB – секторлорунун жана ΔOCB нын аянттарын салыштыралы

$$S_{OCD}<S_{\Delta OCB}<S_{OAB}$$

$$S_{OCD}=\frac{1}{2}\cdot OC\cdot CD,\ S_{\Delta OCB}=\frac{1}{2}\cdot OC\cdot BC,$$

S 1 OA AB



$$S_{OCD}=\frac{1}{2}\cdot\cos x\cdot(x\cos x),\ S_{\Delta OCB}=\frac{1}{2}\cdot\cos x\cdot\sin x,\ S_{OAB}=\frac{1}{2}\cdot x$$

болгондуктан

$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot\cos^2 x<\frac{1}{2}\cdot\cos x\cdot\sin x<\frac{1}{2}\cdot x$$

ээ болобуз. $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ болгондуктан, алынган барабарсыздыкты $\left(\dfrac{1}{2}x\right)$ ке бөлсөк

$$\cos^2 x<\frac{\sin x}{x}<1$$

же $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ болгондуктан

$$1-\sin^2 x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Мындан $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ далилденди деп эсептесек

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin^2 x)=1,\ \lim_{x\to 0}1=1,\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

$\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ болоору ушундай эле каралат (x ти $(-x)$ ке алмаштыруу жетиштүү).

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ биринчи сонун предел деп аталат.

5.8. Монотондук функциянын предели

Бул темада пределинин жашашын алдын ала айтууга мүмкүн болгон айрым функциялардын классы менен таанышабыз. Алдын ала төмөндөгүдөй аныктоону айталы.

$y=f(x),\ x\in X$ функциясы берилсин.

А н ы к т о о. $\forall x_1, x_2 \in X\ \wedge\ x_1 > x_2$:

1. $f(x_1) > f(x_2)\ \Rightarrow\ f(x)$ – өсүүчү;
2. $f(x_1) < f(x_2)\ \Rightarrow\ f(x)$ – кемүүчү;
3. $f(x_1) \geq f(x_2)\ \Rightarrow\ f(x)$ – кемибөөчү;
4. $f(x_1) \leq f(x_2)\ \Rightarrow\ f(x)$ – өспөөчү деп аталат.

Аныктоодогу 1-4 функциялардын классын монотондук функциялар деп атайбыз.

Монотондук функциянын пределинин жашашы төмөндөгү теорема аркылуу чечилет.

Т е о р е м а 33. Төмөндөгү шарттар аткарылсын:

1. a, X көптүгүнүн пределдик чекити жана $\forall x \in X:\ a > x$;
2. $f(x)$ функциясы X көптүгүндө өсүүчү жана $\forall x \in X:\ f(x)\leq M$.

Бул шарттар аткарылганда $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ – чектүү жашайт.

Д а л и л д ө ө. Шарт боюнча $\forall x \in X:\ f(x)\leq M$ болгондуктан функциянын маанилеринин көптүгү $\{f(x)\}$ жогор жагынан чектелген. Демек бул көп-түктүн нак жогорку чеги жашайт. $\sup\{f(x)\}=A$ болсун. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ болоорун далилдейли.

Нак жогорку чектин аныктоосу боюнча $\forall\varepsilon>0$ үчүн $\exists x_1\in X\ (x_1<a)\ \ f(x_1)>A-\varepsilon$ болот. Шарт боюнча $f(x)$ – өсүүчү болгондуктан, $\forall x > x_1$ үчүн $f(x)>A-\varepsilon$ аткарылат. $\delta = a - x_1$ деп алалы. Анда $|x-a|<\delta$ үчүн $|f(x)-A|<\varepsilon$ болот. Теорема далилденди.

Э с к е р т ү ү. Эгерде $f(x)$ жогор жагынан чектелбеген болсо, анда $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Теореманы $f(x)$ функциясы X көптүгүндө кемүүчү болгондо шарттарды өзгөртүү менен өз алдынча далилдөөнү сунуш кылабыз.

Теоремада $\forall x \in X : a > x$. Демек $x \to a - 0$, б.а. x чоңдугу a га сол жагынан гана умтулат. Бул шарт аткарылбаса, б.а. x чоңдугу a дан кичине да чоң да маанилерди кабыл алса теорема туура болобу?

5.9. *e* саны (экинчи сонун предел)

$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ берилсин, $x \neq 0$.

Т е о р е м а 34. $\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, $e = 2{,}718281828459045...$

Д а л и л д ө ө. Теореманы далилдөө үчүн

$$\lim_{x \to 0+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

болоорун көрсөтөлү. Пределдин Гейне (удаалаштык тилиндеги) боюнча аныктоосун колдонолу.

$$\{x_k\} \to 0 \text{ жана } \forall x_k : 0 < x_k < 1.$$

$n_k = E\left(\frac{1}{x_k}\right)$ деп алалы. Сандын бүтүн бөлүгүнүн аныктоосу боюнча $n_k \leq \frac{1}{x_k} < n_k + 1$ жана $n_k \to +\infty$ $(x_k \to 0)$. Мындан $\frac{1}{n_k + 1} < x_k \leq \frac{1}{n_k}$. Бул барабарсыздыктардан

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} < (1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}} < \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1}$$

барабардыгына ээ болобуз.

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1}}{1 + \frac{1}{n_k + 1}},$$

$$\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1} = (1 + n_k)^{\frac{1}{n_k}}\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)$$

өзгөртүп түзүүлөрдү аткарсак

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1} \to e\,,\ \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \to e,\ \left(1+\frac{1}{n_k+1}\right) \to 1,\ \left(1+\frac{1}{n_k}\right) \to 1$$

болоорун эске алсак

$$\lim_{x_k \to 0+0} (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = e$$

болот.

$\lim\limits_{x_k \to 0-0} (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = e$ болоорун далилдейли. $\{x_k\} \to 0 \quad \wedge \quad -1 < x_k < 0$ болсун. $x_k = -y_k$ деп алмаштырсак, анда $0 < y_k < 1,\ y_k \to 0+0$.

$$(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = (1-y_k)^{-\frac{1}{y_k}} = \left(\frac{1}{1-y_k}\right)^{\frac{1}{y_k}} = \left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1-y_k}{y_k}} \cdot \left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right).$$

Мындан

$$\lim_{x_k \to 0-0} (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} = \lim_{y_k \to 0+0} \left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1-y_k}{y_k}} \cdot \left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right) =$$

$$= \lim_{y_k \to 0+0} \left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right)^{\frac{1-y_k}{y_k}} \cdot \lim_{y_k \to 0+0} \left(1+\frac{y_k}{1-y_k}\right) = e\,.$$

Теорема далилденди.

5.10. Каалаган аргументүү функция үчүн пределдин жашоо шарты

Бул темада каалаган функция үчүн пределдин жашоо шарты менен таанышабыз.

$f(x)$, $x \in X$ берилсин. a, X көптүгүнүн пределдик чекити болсун.

Т е о р е м а 35. Каалаган $\varepsilon > 0$ үчүн, кандайдыр бир $\delta(\varepsilon) > 0$ саны жашап $|x_1 - a| < \delta$, $|x_2 - a| < \delta$ барабарсыздыгын канааттандыруучу $x_1,\ x_2$ лер үчүн

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\,.$$

барабарсыздыгынын аткарылышы $x \to a$ да $f(x)$ функциясынын пределинин жашашынын зарыл жана жетиштүү шарты болот.

Д а л и л д ө ө. 1. Зарыл шарт. $\lim_{x\to a} f(x) = A$ болсун. Пределдин аныктоосун колдонсок $|x_1 - a| < \delta$, $|x_2 - a| < \delta$ үчүн $|f(x_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|f(x_2) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ болот. Демек

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - A + A - f(x_2)| \le |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

2. Жетиштүү шарт. Теоремадагы шарт аткарылсын. $\forall\{x_n\} \to a \ \wedge \ x_n \in X$ берилсин. Удаалаштыктын пределинин аныктоосу боюнча $n > n_0(\delta)$ номерлери үчүн $|x_n - a| < \delta$. $n_1 > n_0(\delta)$, $n_2 > n_0(\delta)$ номерлерди алсак $|x_{n_1} - a| < \delta \quad \wedge \quad |x_{n_2} - a| < \delta$ болот. Анда шарт боюнча

$$|f(x_{n_1}) - f(x_{n_2})| < \varepsilon .$$

Бул барабарсыздыктар $\{f(x_n)\}$ удаалаштыгынын пределинин жашашын туюнтат, б.а. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. A предели $\{x_n\}$ удаалаштыгынын тандалышынан көз каранды болбойт. $\{x'_n\}$ удаалаштыгы X көптүгүнөн алынган a га умтулуучу башка удаалаштык болсун. Далилденген боюнча $\{f(x'_n)\} \to A'$ болсун.

$x_1, x'_1, x_2, x'_2, ..., x_n, x'_n, ...$ удаалаштыгын түзөлү. Бул удаалаштык a га жыйналат. Түзүлгөн удаалаштыкка тиешелеш болгон функциялардын маанилеринин

$$f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), ..., f(x_n), f(x'_n), ...$$

удаалаштыгы пределге ээ болбойт. Алынган жыйынтык далилденгенге каршы келет. Демек $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Теорема далилденди.

5.11. Чексиз кичине жана чексиз чоӊ чондуктарды классификациялоо

$\alpha(x)$, $\beta(x)$ функциялары $x \to a$ чексиз кичине чоңдуктар болсун. Практикалык маселелерди чечүүдө бул чоңдуктардын ар биринин нөлгө жакындашын өз ара салыштыруунун негизинде салыштыруу зарылдыгы келип чыгат. Чоңдуктарды салыштыруунун негизи катары алардын катышын алалы, б.а. $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

А н ы к т о о. $\lim_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C - const \ne 0$ болсо, анда $\alpha(x)$, $\beta(x)$ бирдей тартиптеги чоңдуктар деп аталат.

$\alpha(x) = \mathrm{O}(\beta(x))$ түрүндө белгиленет.

А н ы к т о о. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ болсо, анда $\alpha(x)$, $\beta(x)$ ке караганда жогорку тартиптеги чоңдук деп аталат.

$\alpha(x)=o(\beta(x))$ деп белгиленет.

А н ы к т о о. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=C-const\neq 0 \quad (k>0)$ болсо, анда $\alpha(x)$, $\beta(x)$ ке салыштырмалуу k -тартиптеги чексиз кичине чоңдук деп аталат.

А н ы к т о о. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\alpha(x)}=0 \ \wedge \ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=0$ болсо, анда $\alpha(x)$, $\beta(x)$ эквиваленттүү деп аталат.

$\alpha(x)\sim\beta(x)$ түрүндө белгиленет.

А н ы к т о о. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=C$ болсо, анда $C\cdot\beta^k(x)$ туюнтмасы $\alpha(x)$ тин башкы бөлүгү деп аталат.

Э с к е р т ү ү. Чексиз чоң чоңдуктар ушундай эле жолдор менен классификацияланат.

6. Функциялардын үзгүлтүксүздүгү

6.1. Үзгүлтүксүздүктүн аныктоосу

$f(x)$, $x\in X$ берилсин. $x_0\in X$ алалы.

А н ы к т о о. Эгерде $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ болсо, анда $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз деп аталат.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ болсо, анда $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзүлүүгө ээ деп айтабыз.

$x_0, x_1\in X$ чекиттерин алалы. x аргументи x_0 маанисинен x_1 маанисине өтсүн. $x_1-x_0=\Delta x$ деп белгилейли, $x_1=x_0+\Delta x$. $x_0+\Delta x$ туюнтманы x_0 мааниге Δx өсүндү берилди деп айтабыз. $f(x)$ функциясынын x_0, $x_0+\Delta x$ чекиттериндеги маанилерин $f(x_0)$, $f(x_0+\Delta x)$ деп белгилейли

А н ы к т о о. $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ туюнтма x_0 чекитиндеги $f(x)$ функциясынын өсүндүсү деп аталат.

Т е о р е м а 36. $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болушу үчүн $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ болушу зарыл жана жетиштүү.

Д а л и л д ө ө. 1. Зарыл шарт. $f(x)$, x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болсун. /згүлтүксүздүктүн аныктоосу боюнча

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

$x - x_0 = \Delta x$ деп белгилейли, анда $x = x_0 + \Delta x$ жана $x \to x_0$ да $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0}\left(f(x) - f(x_0)\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

2. Жетиштүү шарт. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ болсун.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}\left(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\right) = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0).$$

$\Delta x + x_0 = x$ деп белгилейли, анда $\Delta x \to 0$ да $x \to x_0$. Демек

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Теорема далилденди.

Функциянын үзгүлтүксүздүгү предел аркылуу аныкталды. Мындай болгондо пределдин Гейне жана Коши боюнча анктоолорун, колдонуп үзгүлтүк-сүздүктүн аныктоолорун төмөндөгүдөй да айтса болот.

А н ы к т о о (Гейне). X көптүгүнөн x_0 гө жыйналуучу каалагандай $\{x_n\}$ удаалаштыгын албайлы бул удаалаштыкка тиешелеш болгон $f(x)$ функциясынын маанилеринин удаалаштыгы $\{f(x_n)\}$ ар дайым $f(x_0)$ ке жыйналса, анда $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз деп аталат.

А н ы к т о о (Коши). Каалаган $\varepsilon > 0$ үчүн, кандайдыр бир $\delta(\varepsilon) > 0$ саны жашап $|x - x_0| < \delta$ барабарсыздыгын канааттандырган x тер үчүн

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

барабарсыздыгы аткарылса анда $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз деп аталат.

6.2. Бир жактуу үзгүлтүксүздүктөр

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ пределин эсептөөдө x өзгөрүлмөсү x_0 гө оң жана сол жактан жакындашы мүмкүн. x тин x_0 гө оңдон же солдон жакындашуусун өз алдынча кароо менен төмөндөгүдөй аныктоолорду келтирели.

А н ы к т о о. $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ болсо, анда $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде оң жактан үзгүлтүксүз деп аталат.

А н ы к т о о. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) = f(x_0)$ болсо, анда $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде сол жактан үзгүлтүксүз деп аталат.

x_0 чекитинде функциянын үзгүлтүксүздүгү жана бир жактуу үзгүлтүксүз-дүктөрдүн ортосундагы байланыш төмөндөгү теорема аркылуу туюнтулат.

Т е о р е м а 37. $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$ барабардыгынын аткарылышы $f(x)$ функциясынын x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болушунун зарыл жана жетиштүү шарты болот.

Д а л и л д ө ө. 1. Зарыл шарт. $f(x)$ x_0 чекитинде үзгүлтүксүз. /згүлтүк-сүздүктүн Коши боюнча аныктоосунун негизинде

$$|x-x_0|<\delta : |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon .$$

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow -\delta < x-x_0 < \delta \Rightarrow \begin{cases} -\delta < x-x_0 < 0, \\ 0 < x-x_0 < \delta. \end{cases}$$

Демек $-\delta < x-x_0 < 0$: $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \quad \Rightarrow \quad f(x)$ x_0 чекитинде сол жактан үз-гүлтүксүз;

$0 < x-x_0 < \delta : |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \Rightarrow f(x)$ x_0 чекитинде оң жактан үзгүлтүк-сүз.

2. Жетиштүү шартты далилдөө үчүн төмөндөн жогору карай кайталайбыз. Теорема далилденди.

6.3. Монотондук функциянын үзгүлтүксүздүгү

$f(x)$, $x\in X$ берилсин жана $f(x)$ функциясы X көптүгүндө монотондук болсун. Төмөндөгү теорема $f(x)$ тин X теги үзгүлтүксүз болуу шартын аныктайт.

Т е о р е м а 38. Эгерде x өзгөрүлмөсү X көптүгүндөгү маанилерди кабыл алганда $f(x)$ монотондук өсүүчү (кемүүчү) функциянын маанилери Y көп-түгүнө таандык болуп аны толугу менен толтурса, анда $f(x)$ X көптүгүндө үз-гүлтүксүз болот.

Д а л и л д ө ө. $x_0 \in X$ алалы жана бул чекит X тин сол жак учу болбосун. $f(x)$ функциясы x_0 дө сол жактуу үзгүлтүксүз боloорун далилдейли.

$y_0 = f(x_0) \quad \wedge \quad y_0 \in Y$. y_0 чекити Y тин сол жак учу боло албайт ($f(x)$ өсүүчү болгондуктан).

$\forall\varepsilon > 0$ санын алалы $\wedge$ $(y_0-\varepsilon)\in Y$ болсун. $\{f(x)\}\equiv Y$ болгондуктан $\exists x_1 \in X \quad \wedge$ $f(x_1) = y_0-\varepsilon \quad x_1 < x_0$. $\delta = x_0 - x_1$ деп алалы, анда $x_1 = x_0-\delta$. $x_0-\delta < x < x_0$ шартын канааттандырган x терди алсак $y_0-\varepsilon < f(x) < f(x_0) \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon < f(x)-f(x_0) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f(x)$

функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз. Теорема далилденди (оң жактуу үзгүлтүксүздүк ушундай эле далилденет).

6.4. Үзгүлтүксүз функциянын үстүнөн амалдар

$f(x)$, $g(x)$, $x \in X$ берилсин. $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ функцияларын түзөлү.

Т е о р е м а 39. $f(x)$, $g(x)$, $x \in X$ функциялары X көптүгүндө үзгүлтүк-сүз болсо, анда $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\left(g(x) \neq 0\right)$ функциялары X көптү-гүндө үзгүлтүксүз болушат.

Д а л и л д ө ө. Бул теореманын тууралыгы сумманын, көбөйтүндүнүн, тийиндинин предели жөнүндөгү теореманы колдонуудан келип чыгат.

Мисалы, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ алалы. Шарт боюнча $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. Анда

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Теорема далилденди.

6.5. Элементардык функциялардын үзгүлтүксүздүгү

1. Бүтүн жана бөлчөктүү рационалдык функциялар.

$f(x)$, $x \in R$ берилсин. $\forall x_0 \in R: \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \;\Rightarrow\; f(x)$ R де үзгүлтүксүз.

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

болсун. $a_m x^m$ бир мүчөсүн алалы. $a_m x^m = a_m \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ жолу}}$.

$$\lim_{x \to x_0} a_m x^m = a_m \lim_{x \to x_0} x \cdot \lim_{x \to x_0} x \cdot \ldots \cdot \lim_{x \to x_0} x = a_m x_0^m$$

(үзгүлтүксүз функциялардын көбөйтүндүсү катарында).

$$\lim_{x \to x_0} P_n(x) = a_n \lim_{x \to x_0} x^n + a_{n-1} \lim_{x \to x_0} x^{n-1} + \ldots + a_1 \lim_{x \to x_0} x + a_0 =$$

$$= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = P_n(x_0),$$

б.а. $P_n(x)$ – үзгүлтүксүз.

$\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ карайлы $\left(Q_m(x) \neq 0\right)$.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} P_n(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q_m(x)} = \frac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)} \Rightarrow \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \text{ – үзгүлтүксүз.}$$

2. $y = a^x$ $(0 < a,\ a \neq 1)$. a^x $(a > 1)$ өсүүчү жана $x \in R$: y тин маанилери $Y = (0,+\infty)$ көптүгүн толугу менен толтурат; a^x, $0 < a < 1$ болгондо кемүүчү, $x \in R$: y тин маанилери $Y = (0,+\infty)$ көптүгүн толугу менен толтурат. Демек a^x үзгүл-түксүз.

3. $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. $\log_a x$ функциясы $x \in (0,+\infty)$ маанилери үчүн монотондук ($a > 1$ болгондо өсүүчү; $0 < a < 1$ болгондо кемүүчү) жана маанилери $(-\infty,+\infty)$ аралыгын толугу менен толтургандыктан үзгүлтүксүз.

4. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$, $y = \sec x$, $y = \cos ecx$ (тригонометриялык функциялар).

$y = \sin x$ функциясын алалы. Бул функциянын аныкталуу областы $(-\infty,+\infty) \equiv R$. R көптүгүн $\sin x$ функциясы монотондук болгон аралыктарга бө-лөлү. Мындай аралыктардын бири $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ болот. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ да $\sin x$ өсүүчү жана маанилери $[-1,1]$ аралыгын толугу менен толтурат. Демек $\sin x$ бул аралыкта үзгүлтүксүз. R көптүгүнүн калган бөлүктөрүндө $\sin x$ тин үзгүлтүксүз болоорун далилдөө үчүн $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$, $k \in Z$ аралыктарын кароо жетиштүү.

Калган функциялардын үгүлтүксүздүгү ушундай эле далилденет.

5. $y = x^r$, $r \neq 0$, $x \in (0,+\infty)$. Бул функция $r > 0$ болгондо өсөт, $r < 0$ болгондо кемийт жана функция баардык оң маанилерди кабыл алат. $y = x^r$ үзгүл-түксүз.

6. Тескери тригонометриялык функциялар.

$$y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = arctgx,\ y = arcctgx.$$

Бул функциялардын биринчи экөөсү $[-1,1]$ аралыгында, калган экөөсү $(-\infty,+\infty)$ аралыгында үзгүлтүксүз. Сүйлөмдүн тууралыгын далилдөө үчүн тригонометриялык функцияларды кароо жетиштүү.

6.6. Татаал функциянын үзгүлтүксүздүгү

$y = f(x)$, $x \in X$, $x = \varphi(t)$, $t \in T$ функциялары берилсин. $y = f(\varphi(t))$ функциясынын үзгүлтүксүздүк маселесин карайлы.

Т е о р е м а 40. Төмөндөгү шарттар аткарылсын:

1. $\forall t \in T: \ x \in X$.

2. $\forall x \in X: \ y \in Y$.

3. $\varphi(t)$ функциясы $t_0 \in T$ чекитинде, $f(x)$ функциясы $x_0 = \varphi(t_0)$ чекитинде үзгүлтүксүз.

Жогорудагы шарттар аткарылганда $f(\varphi(t))$ функциясы t_0 чекитинде үз-гүлтүксүз болот.

Д а л и л д ө ө. Шарт боюнча $\varphi(t)$, t_0 чекитинде үзгүлтүксүз болгондуктан

$$\forall \delta_1 > 0 \ \ \exists \delta(\delta_1) > 0 \ \wedge \ |t - t_0| < \delta : |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \delta_1. \qquad (1)$$

$f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болгондуктан.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \wedge \ |x - x_0| < \delta_1 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \qquad (2)$$

(1) жана (2) сүйлөмдөрдү бирдикте карасак, анда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \wedge \ |t - t_0| < \delta : |f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))| < \varepsilon. \qquad (3)$$

(3) сүйлөм $f(\varphi(t))$ функциясыын оши боюнча t_0 чекитиндеги үзгүлтүксүздүгүн туюнтат. Теорема далилденди.

6.7. Даражалык көрсөткүчтүү туюнтмалар

1. u^v туюнтмасы берилип u жана v лар x аргументинен функциялар болсун.

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = a, \ \lim_{x \to x_0} v(x) = b \ \ (a > 0)$$

пределдери жашасын.

$\lim\limits_{x \to x_0} u^v$ табалы. $u^v = e^{v \ln u}$ түрүндө өзгөртөлү. Логарифмалык функциянын үзгүлтүксүздүгүн эске алсак $\lim\limits_{x \to x_0} \ln u = \ln \lim\limits_{x \to x_0} u = \ln a$. $e^{v \ln u}$ көрсөткүчтүү функция үзгүлтүксүз болгондуктан

$$\lim_{x \to x_0} e^{v \ln u} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} v \ln u} = e^{b \ln a} = e^{\ln a^b} = a^b.$$

2. $\lim\limits_{x\to x_0} u^v$ пределин эсептөө талап кылынсын. Мындай көрүнүштөгү пределди табуу үчүн $u^v = y$ деп белгилейли, $y > 0$. Мындан $\ln y = v\ln u$ ээ болобуз. Барабардыкта $x \to x_0$ да пределге өтөлү.

$$\lim_{x\to x_0} \ln y = \lim_{x\to x_0}(v\ln u) = \lim_{x\to x_0} v \lim_{x\to x_0} \ln u$$

(аткарылган амалдар закондуу деп эсептейбиз).

Логарифмалык функциянын үзгүлтүксүздүгүн эске алсак

$$\ln \lim_{x\to x_0} y = \lim_{x\to x_0} v \cdot \ln \lim_{x\to x_0} u\,.$$

Алынган барабардык $\lim\limits_{x\to x_0} u$, $\lim\limits_{x\to x_0} v$ пределдери жашаса, талап кылынган пределди эсептөөгө мүмкүнчүлүк берет.

6.8. Айрым пределдерди эсептөө

Төмөндөгү пределдерди эсептейли:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \cdot \log_a(1+x) = \lim\limits_{x\to 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$. Логарифмалык функциянын үзгүлтүксүздүгүн эске алсак

$$\lim_{x\to 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e\,.$$

2. $a^x - 1 = t$ деп белгилейли. $x \to 0$ да $t \to 0$ болот.

$$a^x = t+1,\ \ln a^x = \ln(t+1),\ x = \frac{\ln(t+1)}{\ln a}\,.$$

Белгилөөлөрдү, өзгөртүүлөрдү эске алсак, анда

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t\ln a}{\ln(t+1)} = \ln a \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{1}{t}\ln(t+1)} = \ln a \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0} \ln(t+1)^{\frac{1}{t}}} = \ln a\,.$$

3. $(1+x)^{\alpha}-1=t$ дейли. Мындан $x\to 0$ да $t\to 0$ жана

$$(1+x)^{\alpha}=t+1 \Rightarrow \alpha\ln(1+x)=\ln(t+1) \Rightarrow \frac{\alpha\ln(1+x)}{\ln(1+t)}=1.$$

$$\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\frac{t}{x}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{\ln(1+t)}=\alpha\cdot\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Демек

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\alpha.$$

6.9. Үзүлүү чекиттеринин түрлөрү

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ болсо, анда x_0 чекити үзүлүү чекити деп аталат.

Бул барабарсыздык аткарылганда төмөндөгүдөй үч учурлардын болушу мүмкүн:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ жашайт, бирок $A\neq f(x_0)$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ жашабайт, бирок $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ жашайт $\left(\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ жашабайт, б.а. $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ дин жок дегенде бири жашабайт же чексиз.

А н ы к т о о. 1 – учурда x_0 чекитин түзөтүүгө мүмкүн болгон үзүлүү чекити деп атайбыз;

2 – учурда x_0 биринчи түрдөгү, 3 – учурда x_0 экинчи түрдөгү үзүлүү чекити деп аталат.

Түзөтүүгө мүмкүн болгон үзүлүү чекити дегендин мааниси төмөндөгү-дөй:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \wedge A\neq f(x_0)$ болгондуктан, x_0 чекитинде $f(x)$ үзгүлтүксүз болуш үчүн $f(x_0)=A$ деп кабыл алуу жетиштүү.

7. /згүлтүксүз функциялардын касиеттери

7.1. Локалдык касиеттер

А н ы к т о о. Эгерде кандайдыр бир касиет чекиттин жетишээрлик кичине чекебелинде орун алса, анда бул касиетти локалдык деп атайбыз.

$y = f(x)$, $x \in X$ берилсин. Функциянын локалдык касиеттерин төмөндөгү-дөй теоремалар түрүндө туюнталы.

Т е о р е м а 41. $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болсо, анда $f(x)$ бул чекиттин кандайдыр бир чекебелинде чектелген болот.

Д а л и л д ө ө. /згүлтүксүздүктүн Коши боюнча аныктоосун колдонолу

$$|x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon .$$

Теорема далилденди.

Т е о р е м а 42. $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз жана $f(x_0) \neq 0$ болсо, анда $f(x)$ бул чекиттин кандайдыр бир чекебелинде өз белгисин сактайт.

Д а л и л д ө ө. $f(x_0) > 0$ болсун. /згүлтүксүздүктүн Коши боюнча аныктоосун колдонсок

$$|x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon .$$

$0 < \varepsilon$ – каалагандай сан болгондуктан $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$ деп алалы, анда

$$0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2} .$$

Демек

$$|x - x_0| < \delta \ \wedge \ \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} : \ f(x) > 0 .$$

$f(x_0) < 0$ ушундай эле далилденет. Теорема далилденди.

7.2. Глобалдык касиеттер

А н ы к т о о. Эгерде кандайдыр бир касиет көптүктүн баардык чекиттери (элементтери) үчүн орун алса, анда бул касиетти глобалдык деп атайбыз.

Глобалдык касиеттерди төмөндөгүдөй теоремалар түрүндө туюнталы.

Т е о р е м а 43 (Больцано-Кошинин биринчи теоремасы). $f(x)$ функциясы $[a,b]$ үзгүлтүксүз жана бул аралыктын учтарында түрдүү белгидеги маанилерге ээ болсо, анда жок дегенде бир $c \in (a,b)$ чекити жашап $f(c) = 0$ болот.

Д а л и л д ө ө. Шарт боюнча $f(x)$ функциясы $[a,b]$ аралыгынын учтарында түрдүү белгидеги маанилерге ээ болгондуктан $f(a)<0$, $f(b)>0$ деп эсептейли. $[a,b]$ ны $\frac{a+b}{2}$ чекити менен тең экиге бөлөлү. Бул чекиттеги $f(x)$ тин маанисин эсептейли. $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$, болсо $c=\frac{a+b}{2}$ болуу менен теорема далилденет. $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\neq 0$ болсо, анда $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ $\vee$ $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$. Демек $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ аралыктарынын биринде функциянын аралыктын учтарындагы маанилери түрдүү белгиде болот. Бул аралыкты $[a_1,b_1]$ деп белгилейли, $f(a_1)<0$, $f(b_1)>0$. Жогорудагыдай эле $[a_1,b_1]$ ди тең экиге бөлөлү жана бөлүү чекитиндеги $f(x)$ тин маанисин эсептейли. $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0$, болсо теорема далилденет. $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)\neq 0$ болсо $[a_2,b_2]$ жашап $f(a_2)<0$, $f(b_2)>0$ болот. Бул процессти улаталы. Натыйжада камтылган аралыктарга ээ болобуз.

$$\{[a_n,b_n],\ \forall n\in N:[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]\},\ f(a_n)<0,\ f(b_n)>0.$$

Түзүлгөн аралыктар камтылган аралыктар жөнүндөгү лемманын баардык шарттарын канааттандырат. Демек $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$ жашайт, $a_n<c<b_n$ $(a<c<b)$.

$f(x)$, $[a,b]$ де үзгүлтүксүз болгондуктан

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(c)\leq 0\ \wedge\ \lim_{n\to\infty}f(b_n)=f(c)\geq 0\ \Rightarrow\ f(c)=0.$$

Теорема далилденди.

Т е о р е м а 44 (Больцано-Кошинин экинчи теоремасы). $f(x)$ функциясы $[a,b]$ де үзгүлтүксүз жана аралыктын учтарында барабар эмес маанилерге ээ болсо, б.а. $f(a)=A\neq B=f(b)$, анда A, B сандарынын арасында жаткан каалаган C саны үчүн c $(a<c<b)$ чекити жашап $f(c)=C$ болот.

Д а л и л д ө ө. $A\neq B$ болгондуктан $A<B$ деп эсептейли. $\varphi(x)=C-f(x)$ функциясын түзөлү, $A<C<B$. $\varphi(x)$ функциясы Теорема 43 түн шарттарын канааттандырат. Демек c $(a<c<b)$ чекити жашап

$$\varphi(c)=C-f(c)\ \vee\ f(c)=C.$$

Теорема далилденди.

Теорема 44 аралык маани жөнүндөгү теорема деп аталат.

Н а т ы й ж а. $f(x)$ функциясы X үзгүлтүксүз болсо, ада анын маанилери кандайдыр бир Y көптүгүн толугу менен толтурат.

Т е о р е м а 45 (Вейерштрасстын биринчи теоремасы). $f(x)$ функциясы $[a,b]$ үзгүлтүксүз болсо, анда $f(x)$ бул аралыкта чектелген болот, б.а.

$$m \le f(x) \le M .$$

Д а л и л д ө ө. Каршысынан жүргүзөлү. $f(x)$ функциясы $[a,b]$ де төмөн жагынан чектелбесин. $\forall n \in N$ алалы. Бул сан үчүн $\exists x_n \in [a,b]$ табылып $f(x_n) \le -n$ болот, $\{x_n\}$ удаалаштыгы түзүлөт. $\forall n \in N : a \le x_n \le b$, б.а. $\{x_n\}$ чектелген удаалаштык. Лемма 6 боюнча бул удаалаштыктан чектүү пределге ээ боло турган $\{x_{n_k}\}$ бөлүкчө удаалаштыкты бөлүүгө болот. $\lim x_{n_k} = x_0$ болсун. $a \le x_{n_k} \le b \Rightarrow a \le x_0 \le b$ болот.

$f(x)$ тин маанилеринен түзүлгөн $\{f(x_{n_k})\}$ удаалаштыкты карайлы. Түзүү боюнча $\forall n_k \in N : f(x_{n_k}) \le -n_k \quad \vee \quad f(x_{n_k}) \to -\infty$. Экинчи жактан $f(x)$ функциясы $[a,b]$ де үзгүлтүксүз болгондуктан

$$\lim f(x_{n_k}) = f(x_0).$$

Бул карама-каршылыктан теореманын тууралыгы келип чыгат. $f(x)$ тин жогор жагынан чектелгендиги ушундай эле жол менен далилденет.

Т е о р е м а 46 (Вейерштрасстын экинчи теоремасы). $f(x)$ функциясы $[a,b]$ үзгүлтүксүз болсо, анда ал бул аралыктын кандайдыр бир чекиттеринде өзүнүн нак жогорку жана нак төмөнкү чектик маанилерине ээ болот.

Д а л и л д ө ө. Теорема 45 боюнча $\forall x \in [a,b] : m \le f(x) \le M$, $m = \inf\{f(x)\}$, $M = \sup\{f(x)\}$. $\exists x_1, x_2 \in [a,b] \wedge f(x_1) = m, f(x_2) = M$ болоорун далилдейли. Далилдөөнү каршысынан жүргүзөлү. $\forall x \in [a,b]$: $f(x) < M$ болсун. $\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ функциясын карайлы. $\varphi(x)$ функциясы $[a,b]$ де үзгүлтүксүз, анда теорема 45 боюнча $\varphi(x) \le \mu \ (\mu > 0)$, б.а.

$$\frac{1}{M - f(x)} \le \mu \ \vee \ f(x) \le M - \frac{1}{\mu}.$$

Акыркы алынган барабарсыздык боюнча $f(x)$ функциясынын нак жогорку чеги $M - \dfrac{1}{\mu} (\le M)$ саны болот. Бул карама-каршылыктан $\exists x_2 \in [a,b] \wedge f(x_2) = M$ болоору келип чыгат. $\exists x_1 \in [a,b] \wedge f(x_1) = m$ болоору ушундай эле далилденет.

7.3. Тескери функциянын жашашы

$y = f(x)$, $x \in X$ берилсин. $f(x)$ тин маанилеринин көптүгү Y болсун.

Т е о р е м а 47. $f(x)$ функциясы X көптүгүндө монотондук өсүүчү (кемүүчү) жана үзгүлтүксүз болсун. Бул шарттар аткарылганда Y көптүгүндө аныкталган $f(x)$ ке тескери болгон $x = g(y)$ функциясы жашайт. $x = g(y)$ монотондук өсүүчү (кемүүчү) жана үзгүлтүксүз болот.

Д а л и л д ө ө. $f(x)$ функциясы X көптүгүндө үзгүлтүксүз болгондуктан анын маанилери Y көптүгүн толугу менен толтурат. $\forall x_0 \in X$: $\exists y_0 \in Y \;\; \wedge \;\; f(x_0) = y_0$. $f(x)$ монотондук болгондуктан y_0 бирөө гана болот.

$\exists y_0 \in Y$ алсак, анда бул мааниге X көптүгүнөн бир гана x_0 тиешелеш болот. Функцияын аныктоосу боюнча Y аныкталган бир маанилүү $x = g(y)$ функциясы жашайт.

$g(y)$ функциясынын монотондук өсүүчү болоорун далилдейли. $y_1 < y_2 \;\; \Rightarrow$ $x_1 = g(y_1) < x_2 = g(y_2)$ болот. Мындай болбосо $f(x_1) = y_1 > f(x_2) = y_2$ болмок.

$g(y)$ функциясы монотондук функциясынын үзгүлтүксүздүгү жөнүндөгү теореманын (Теорема 38) шарттарын канааттандыргандыктан Y көптүгүндө үзгүлтүксүз болот.

7.4. Бир калыпта үзгүлтүксүздүк

$f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болсо, анда Кошинин аныктоосу боюнча

$$\forall \varepsilon > 0 \colon \exists \delta(\varepsilon) \;\wedge\; |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Бул аныктоодогу δ саны ε дон эле көз каранды болбостон x_0 дөн да көз каранды болот (тиешелүү мисал келтирип көргүлө). Демек $f(x)$ функциясы X көптүгүндө үзгүлтүксүз болсо, бул көптүктүн баардык x_0 чекиттери үчүн жарактуу болгон δ саны (ε өзгөрбөсө деле) жашабай калышы мүмкүн.

А н ы к т о о. $(\forall \varepsilon > 0 \colon \exists \delta(\varepsilon) > 0) \wedge (\forall x_1, x_2 \in X : |x_1 - x_2| < \delta) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ аткарылса $f(x)$ функциясы X көптүгүндө бир калыпта үзгүл-түксүз деп аталат.

Төмөндөгү теорема үзгүлтүксүздүктүн жана бир калыпта үзгүлтүксүздүк-түн ортосундагы байланышты туюнтат.

Т е о р е м а 48 (Кантордун теоремасы). $f(x)$ функциясы $[a,b]$ де үзгүлтүксүз болсо, анда ал бул аралыкта бир калыпта үзгүлтүксүз болот.

Д а л и л д ө ө. Каршысынан жүргүзөлү. Кандай гана $\delta > 0$ санын албайлы кандайдыр бир $\varepsilon > 0$ саны жашап, $x_1, x_2 \in [a,b]$ маанилери табылып $|x_1 - x_2| < \delta$ аткарылганда $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$ болот.

$\{\delta_n > 0\} \to 0$ удаалаштыкты алалы. Жогорудагы айтылганды эске алсак δ_n саны үчүн $x_{1n}, x_{2n} \in [a,b]$ маанилери табылып $|x_{1n} - x_{2n}| < \delta$ аткарылганда $|f(x_{1n}) - f(x_{2n})| \geq \varepsilon$ болот. Лемма 6 боюнча $\{x_{1n}\}$, $\{x_{2n}\}$ чектелген удаалаштыктардан чектүү пределге ээ боло турган $\{x'_{1n}\}$, $\{x'_{2n}\}$ бөлүкчө удаалаштыктарды бөлүүгө болот.

$\lim x'_{1n} = x_0$ болсун. Анда $x'_{1n} - x'_{2n} \to 0$ болгондуктан $\lim x'_{2n} = x_0$. $\{f(x'_{1n})\}$, $\{f(x'_{2n})\}$ удаалаштыктарды карайлы. $f(x)$ үзгүлтүксүз болгондуктан

$$\lim f(x'_{1n}) = f(x_0),\ \lim f(x'_{2n}) = f(x_0) \ \Rightarrow\ f(x'_{1n}) - f(x'_{2n}) \to 0.$$

Алынган жыйынтык $\forall n \in N : |f(x'_{1n}) - f(x'_{2n})| \geq \varepsilon$ шартына каршы келет. Бул карама-каршылык теореманын туура экендигин тастыктайт.

7.5. Функциянын термелүүсү

$f(x)$, $x \in X$ берилсин. $m = \inf\limits_{x \in X}\{f(x)\}$, $M = \sup\limits_{x \in X}\{f(x)\}$ болсун.

А н ы к т о о. $\varpi = M - m$ айырма $f(x)$ функциясынын X көптүгүндөгү термелүүсү д.а.

Бул аныктоону төмөндөгүдөй айтса да болот

А н ы к т о о. $\varpi = \sup\limits_{x_1, x_2 \in X}\{|f(x_1) - f(x_2)|\}$ айырмасы $f(x)$ функциясынын X көптүгүндөгү термелүүсү д.а.

Айтылган аныктоолор өз ара тең күчтө.

Н а т ы й ж а. $f(x)$ функциясы X көптүгүндө үзгүлтүксүз болсо, анда функциянын термелүүсү бул көптүктөгү функциянын эң чоң жана эң кичине маанилеринин айырмасы болот.

Н а т ы й ж а. $f(x)$ функциясы $[a,b]$ да үзгүлтүксүз болсо, анда каалаган $\varepsilon > 0$ саны үчүн кандайдыр бир $\delta > 0$ саны жашап $[a,b]$ нын каалагандай, ар биринин узундугу δ дан кичине болгондой, бөлүкчө аралыктарга бөлсөк ар бир бөлүкчө аралыкта функциянын термелүүсү ε дон кичине болот.

Бир өзгөрүлмөлүү функциянын дифференциалдык эсептөөлөрү

8. Туунду жана дифференциал

8.1. Туундунун аныктоосу

$y = f(x)$, $x \in X$ берилсин жана X ачык көптүк болсун. $x_0 \in X$ алалы, x_0 гө Δx өсүндүсүн берели, б.а. $x_0 + \Delta x$. X ачык көптүк болгондуктан $x_0 + \Delta x \in X$ деп айтууга негиз бар.

$$y_0 = f(x_0),\; y_1 = f(x_0 + \Delta x)$$

белгилөөлөрүн киргизели.

Аргументтин x_0 мааниси Δx өсүндүсүн алганда функция

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

өсүндүсүнө ээ болот.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{8.1.1}$$

туюнтмасын түзөлү.

А н ы к т о о. (8.1.1) туюнтманын $\Delta x \to 0$ гы предели $f(x)$ функциясынын x_0 чекитиндеги туундусу деп аталат, б.а.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{8.1.2}$$

Туундуну төмөдөгүдөй белгилөө кабыл алынган

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = \frac{dy(x_0)}{dx} = \frac{df(x_0)}{dx} = y'(x_0).$$

(8.1.2) пределдин мааниси чектүү, чексиз же таптакыр жашабай калышы да мүмкүн. Акыркы учурда $f(x)$ тин x_0 чекитинде туундусу жашабайт деп айтабыз.

x_0 чекитинде туундунун мааниси чектүү болсо, анда ал турактуу сан болот. Эгерде $f(x)$ функциясынын туундусу X көптүгүнүн ар бир чекитинде жашаса, анда туунду x тен функция болот.

$f(x)$ функциясынын туундусу жашаса, анда бул функцияны дифференциалдануучу деп атайбыз.

8.2. Тескери функциянын туундусу

$y = f(x)$, $x \in X$ болсун.

Т е о р е м а 49. 1. $f(x)$ функциясы теорема 47 нин шарттарын канааттандырсын. 2. $f'(x_0) \neq 0$ туунду жашасын. Бул шарттар аткарылганда $x = g(y)$ тескери функция жашап, бул функциянын $y_0 = f(x_0)$ чекитиндеги туундусу

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

болот.

Д а л и л д ө ө. Теореманын 1 – шарты боюнча $f(x)$ функциясына тескери болгон $x = g(y)$ функциясы жашайт. $g'(y_0)$ дү табалы ($y_0 = f(x_0)$).

y_0 мааниге Δy өсүндүсүн берели, анда

$$\Delta x = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)$$

ээ болобуз. $\Delta y \neq 0$ болсо, анда $\Delta x \neq 0$ болот ($g(y)$ – бир маанилүү функция болгондуктан). Демек

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

$\Delta y \to 0$ да $x = g(y)$ функциясынын үзгүлтүксүздүгү боюнча $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Теорема далилденди.

8.3. Аныктоонун жардамында туундуларды табу

1. $f(x) = C - const$.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0, \; f'(x) = (C)' = 0.$$

2. $f(x) = x$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

$x_0 = 1$ болсун, анда $f(x_0) = 1$, $f(x_0 + \Delta x) = x_0 + \Delta x = 1 + \Delta x$. Демек

$$\Delta y = 1 + \Delta x - 1 = \Delta x,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \; f'(1) = (x)'_{x=1} = 1.$$

Каалагандай $x \in (-\infty, +\infty)$ болсун.

$$f(x+\Delta x)=x+\Delta x,\ \Delta y=x+\Delta x-x=\Delta x,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1\ \Rightarrow\ (x)'=1.$$

3. $f(x)=x^2,\ x\in(-\infty,+\infty)$.

$x_0=-1$ алалы. $f(x_0)=(-1)^2=1,\ f(x_0+\Delta x)=(-1+\Delta x)^2=1-2\Delta x+\Delta x^2$.

$$\Delta y=1-2\Delta x+\Delta x^2-1=-2\Delta x+\Delta x^2=\Delta x(-2+\Delta x),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(-2+\Delta x)}{\Delta x}=-2,\ (x^2)'_{x=-1}=-2.$$

Каалагандай $x\in(-\infty,+\infty)$ алалы, анда

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2,\ \Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+\Delta x^2=\Delta x(2x+\Delta x),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}=2x\ \Rightarrow\ (x^2)'=2x.$$

4. $f(x)=x^p-$ даражалык функция берилсин, мында $p\in R$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^p-x^p}{\Delta x}=\frac{x^p\left(\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^p-1\right)}{\Delta x}=x^{p-1}\cdot\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^p-1}{\frac{\Delta x}{x}},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^{p-1}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^p-1}{\frac{\Delta x}{x}}=x^{p-1}\cdot p=px^{p-1}.$$

Демек $(x^p)'=px^{p-1}$.

$p=-1$ болсо, $(x^{-1})'=-1x^{-1-1}=-x^{-2}=-\dfrac{1}{x^2}$.

$p=\dfrac{1}{2}$ болсо, $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

5. $y=a^x-$ көрсөткүчтүү функция, $0<a,\ a\neq 1$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a.$$

Демек $(a^x)'=a^x\ln a$.

6. $y=\log_a x-$ логарифмалык функция, $0<a$, $a\neq 1$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\log_a e,$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}.$$

$y=\ln x$ болсо, анда $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

7. $y=\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx-$ тригонометриялык функциялар берилсин.

$y=\sin x$ функциясын алалы,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x,\ (\sin x)'=\cos x.$$

Жогорудагыдай эле эсептөөлөрдүн жардамында

$$(\cos x)'=-\sin x,\ (tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x},\ (ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

болоору далилденет.

8. $y=\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$ – тескери тригонометриялык функциялар.

Бул функциялардын туундуларын эсептөө үчүн Теорема 49 колдонобуз.

$y=\arcsin x$ функциясын алалы. Бул функцияга тескери функция $x=\sin y$ болот. Андыктан

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(\sin(\arcsin x)=x),$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ушундай эле жол менен

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ (arctgx)'=\frac{1}{1+x^2},\ (arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

болоору көрсөтүлөт.

8.4. Туундунун таблицасы

Аныктоонун жардамында алынган айрым функциялардын туундуларынын таблицасын түзөлү

№ к/н	$f(x)$	$f'(x)$	№ к/н	$f(x)$	$f'(x)$
1	C	0	6	$\cos x$	$-\sin x$
			7	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$
2	x^p	px^{p-1}	8	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	9	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	10	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3	a^x	$a^x \ln a$	11	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$
4	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	12	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}$
5	$\sin x$	$\cos x$			

8.5. Функциянын өсүндүсү үчүн формула

$y = f(x)$, $x \in X$ берилсин. X ачык көптүк болсун.

Каалагандай $x \in X$ чекитин алалы жана функциянын өсүндүсүн жазалы

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Т е о р е м а 50. $f(x)$ функциясы x чекитинде дифференциалдануучу болсо, анда

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \qquad (8.5.1)$$

болот. (8.5.1) де $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$, б.а. $\alpha(\Delta x) -$ ч.к.ф.

Д а л и л д ө ө. (8.5.1) формуланын тууралыгын далилдөө үчүн туундунун аныктоосун колдонолу, б.а.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Теорема 29 негизинде

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \alpha(\Delta x) - \text{ч.к.ф.}$$

Мындан (8.5.1) дин тууралыгы келип чыгат.

$\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$ туюнтмасы $\Delta x \to 0$ да Δx салыштырмалуу жогорку тартиптеги чексиз кичине чоңдук болгондуктан (8.5.1) ди төмөндөгүдөй да жазууга болот.

$$\Delta y = f'(x)\cdot\Delta x + o(\Delta x).$$

Т е о р е м а 51. $f(x)$ функциясы x чекитинде дифференциалдануучу болсо, анда бул чекитте $f(x)$ үзгүлтүксүз болот.

Д а л и л д ө ө. (8.5.1) ден

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$$

болоору келип чыгат, демек

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) = f(x),$$

б.а. $f(x) -$ x чекитинде үзгүлтүксүз.

8.6. Туундуну эсептөөнүн жөнөкөй эрежелери

$f(x)$, $g(x)$, $x\in X$ берилсин.

Т е о р е м а 52. $f(x)$, $g(x)$ функциялары X көптүгүндө дифференциалдануучу болсун, анда

1. $\big(f(x)\pm g(x)\big)' = f'(x)\pm g'(x)$;

2. $\big(f(x)\cdot g(x)\big)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$;

3. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ болот.

Теорема 52 $f(x)$, $g(x)$ функцияларынын суммасынын, көбөйтүндүсүнүн, тийиндисинин туундусун табуу эрежелерин аныктайт.

Д а л и л д ө ө. Теореманы далилдөө үчүн туундунун аныктоосунан пайдаланабыз. 3 – бөлүктү далилдейли, калгандары ушундай эле далилденет.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot g(x+\Delta x)\cdot g(x)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)\cdot f(x)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}=$$

($g(x)-$ үзгүлтүксүз болгондуктан)

$$=\frac{1}{g^2(x)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{g(x)\cdot\Delta f(x)}{\Delta x}-\frac{f(x)\cdot\Delta g(x)}{\Delta x}\right]=\frac{1}{g^2(x)}\cdot\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)\cdot\Delta f(x)}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\cdot\Delta g(x)}{\Delta x}\right]=$$

$$=\frac{1}{g^2(x)}\left[g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)\right]=\frac{g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Теорема далилденди.

Н а т ы й ж а. $g(x)=C-const$ болсо, анда

$$\left(C\cdot f(x)\right)'=C\cdot f'(x)$$

болот. Демек турактуу көбөйтүүчүнү туунду белгисинин сыртына чыгарууга болот.

8.7. Татаал функциянын туундусу

$y=f(x)$, $x\in X$, $x=g(t)$, $t\in T$ берилсин.

Т е о р е м а 53. 1. $g(t)$ функциясы $t_0\in T$ чекитинде дифференциалдануучу 2. $f(x)$ функциясы $x_0\in X$ $(x_0=g(t_0))$ чекитинде дифференциалдануучу болсун. Бул шарттар аткарылганда $f(g(t))$ t_0 чекитинде дифференциалдануучу болот жана

$$\left(f(g(t))\right)'_{t=t_0}=f'(x_0)\cdot g'(t_0) \qquad (8.7.1)$$

же

$$y'_t=y'_t\cdot x'_t.$$

Д а л и л д ө ө. $y=f(x)$ функциясынын өсүндүсү үчүн төмөндөгү формуланы жазууга болот

$$\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x.$$

Барабардыктын эки жагын тең Δt га бөлөлү

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x_0)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha(\Delta x)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Бул барабардыктан $\Delta t \to 0$ да пределге көчсөк жана теореманын 2 – шартын эске алсак

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x_0)\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\alpha(\Delta x)\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = f'(x_0)\cdot g'(t_0)\ (\Delta t \to 0 \text{ да } \Delta x \to 0).$$

Демек

$$y'_t = f'(x_0)\cdot g'(t_0).$$

Теорема далилденди.

Далилденген теореманын практикалык маанисин белгилей кетели. Эгерде $f(x)$, $g(t)$ элементардык функциялар болсо, анда булардан түзүлгөн $f(g(t))$ функциясы да элементардык функция болот. Мындай болгондо теоремадагы эрежени колдонуп туундулардын таблицасын кеңейтүүгө болот. Мисалдар келтирели.

1. $y = f(x)^{g(x)}$ берилсин жана $f'(x)$, $g'(x)$ жашасын.

Барабардыкты логарифмалайлы

$$\ln y = g(x)\cdot\ln f(x),$$

$$(\ln y)' = g'(x)\cdot\ln f(x) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)},$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = g'(x)\cdot\ln f(x) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)},$$

$$y' = f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\cdot\ln f(x) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right].$$

2. $y = e^x$, $x = \sin t$ болсун. $e^{\sin t}$ функциясынын туундусун табалы

$$(e^{\sin t})' = (e^x)'\cdot x_t' = e^x\cdot(\sin t)' = e^{\sin t}\cdot\cos t.$$

3. $y = \sqrt{1-x^2}$.

$$y' = \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

8.8. Бир жактуу туундулар

$y = f(x)$, $x \in X$ берилсин. Туунду түшүнүгүн аныктоодо X көптүгү ачык көптүк деп эсептелген, б.а. X көптүгүнүн баардык чекиттери ички чекиттер. Каралып жаткан учурда X туюк көптүк болсун. Мындай болгондо x_0 чекити X көптүгүнүн бир жак учу болушу мүмкүн. Мисалы x_0, X тин оң жак учу болсун. x_0 мааниге Δx өсүндүсүн берсек, $\Delta x < 0$ болууга тийиш. $\Delta x \to 0$ да, $\Delta x < 0$ маанилерди гана кабыл алуу менен нөлгө умтулат. Бул учурда туундуну аныктоодо айтылган шартты сөзсүз түрдө эске алууга тийишпиз.

А н ы к т о о. $\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ предели $f(x)$ функциясынын x_0 чекитиндеги сол жактуу туундусу деп аталат.

$f'(x_0 - 0)$ түрдө белгиленет.

Оң жактуу туунду ушундай эле аныкталат жана төмөндөгүдөй белгиленет $f'(x_0 + 0)$.

x_0 чекити X тин ички чекити болсун. Бул чекитте да $f(x)$ функциясынын бир жактуу туундуларын аныктоого болот.

Төмөндөгүдөй суроонун келип чыгышы табигый нерсе. Эгерде x_0 чекитинде бир жактуу туундулар жашаса, анда бул чекитте функциянын туундусу жашайбы?

Бул суроого төмөндөгү теорема жооп берет.

Т е о р е м а 54. x_0 чекитинде $f'(x_0 - 0)$, $f'(x_0 + 0)$ туундулардын жашашы жана $f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0)$ болушу $f(x)$ функциясынын x_0 чекитинде туундусунун жашашынын зарыл жана жетиштүү шарты болот.

Д а л и л д ө ө. Теореманын далилдөөсү бир жактуу пределдердин барабардыгынан келип чыгат. Толук далилдөөнү окурманга калтырабыз.

Теорема 54 төгү шарттардын маанилүүлүгүн төмөндөгү мисалда көрсөтөлү.

$y = |x|$ функциясынын x_0 чекитиндеги туундусун табалы. Ал үчүн бир жактуу туундуларды табалы

1. $\Delta x < 0$, $\Delta y = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x| = -\Delta x$.

$$f'(0-0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

2. $\Delta x > 0$, $\Delta y = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x| = \Delta x$.

$$f'(0+0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Демек $f'(0-0)$, $f'(0+0)$ жашайт, бирок алар барабар эмес. Теорема 54 боюнча $x_0=0$ чекитинде $f(x)=|x|$ функциясынын туундусу жашабайт.

Каралган мисалдын негизинде төмөндөгүдөй жыйынтык чыгарууга болот.

Эгерде $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болсо, анда бул чекитте функциянын туундусу ар дайым эле жашай бербейт.

Алынган жыйынтыкты жана Теорема 51 ди бириктирүү аркылуу төмөндөгү теореманы айтуу мүмкүнчүлүгүнө ээ болобуз.

Т е о р е м а 55. $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде дифференциалданууучу болсо, анда $f(x)$ бул чекитте үзгүлтүксүз болот.

Бул сүйлөмгө тескери сүйлөм ар дайым эле туура боло бербейт.

Төмөндөгү мисалды карайлы

$y=x\sin\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ функциясы берилсин. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$ жашайбы?

$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leq|x|$ болгондуктан $x\to 0$ да $x\sin\frac{1}{x}\to 0$ болот, б.а. жогорудагы предел жашайт.

$y=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}$ функциясын алалы. Бул функция $x=0$ чекитинде үзгүл-түксүз.

$x=0$ чекитиндеги функциянын бир жактуу туундуларын табалы.

$$\Delta y=\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}-0=\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}.$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{1}{\Delta x}.$$

Акыркы предел $\Delta x\to 0$ кандай жол менен умтулса да жашабайт, демек берилген функциянын $x=0$ чекитиндеги бир жактуу туундулары жашабайт.

Каралган мисал Теорема 55 тин экинчи бөлүгүнүн тууралыгын тастыктайт.

8.9. Дифференциал

$y=f(x)$, $x\in X$ берилсин. $x_0\in X$ алалы.

А н ы к т о о. $f(x)$ функциясынын x_0 чекитиндеги Δy өсүндүсү үчүн

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \qquad (8.9.1)$$

формула орун алса, анда $f(x)$, x_0 чекитинде дифференциалдануучу, ал эми $A \cdot \Delta x$ туюнтмасы $f(x)$ тин дифференциалы деп аталат. dy, $df(x_0)$ символдору аркылуу белгиленет.

Аныктоо боюнча

$$dy(x_0) = df(x_0) = A \cdot \Delta x,\ A - const. \qquad (8.9.2)$$

(8.9.2) формулада (дифференциалда) A чоңдугу Δx тен көз каранды эмес жана $A \cdot \Delta x$ туюнтмасы Δx ке карата сызыктуу.

8.10. Дифференциалдын жана туундунун ортосундагы байланыш

Аталган байланыш төмөндөгү теорема аркылуу туюнтулат.

Т е о р е м а 56. $f(x)$ функциясынын x_0 чекитинде туундусунун жашашы $f(x)$ тин x_0 чекитинде дифференциалынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарты болот.

Д а л и л д ө ө. Зарыл шарт. $f(x)$ тин x_0 чекитинде дифференциалы жашасын, б.а.

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x).$$

Бул барабардыктын эки жагын тең Δx ке бөлүп, $\Delta x \to 0$ пределге өтөлү.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

Бул барабардык көрсөтүп тургандай $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ предели жашайт. Туундунун аныктоосу боюнча

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = A.$$

Жетиштүү шарт. $f(x)$ тин x_0 чекитинде туундусу жашасын. Теорема 50 боюнча

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

$A = f'(x_0)$ деп алсак (8.9.1) формулага ээ болобуз, б.а. $f(x)$ тин x_0 чекитиндеги дифференциалы жашайт. Теорема 56 көрсөтүп тургандай $f(x)$ функциясынын дифференциалы ар дайым

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x \qquad (8.10.1)$$

барабар.

М и с а л. $f(x)=x$ функциясынын дифференциалын табалы.

$f'(x)=1$ болгондуктан $dy=dx=1\cdot\Delta x=\Delta x \ \Rightarrow\ dx=\Delta x$.

Алынган барабардыкты эске алсак (8.10.1) формуланы төмөндөгүдөй жазууга болот

$$\Delta y = f'(x)\cdot dx. \qquad (8.10.2)$$

8.11. Дифференциалдын таблицасы жана эрежелери

Таблица

№ к/н	$f(x)$	$df(x)$	№ к/н	$f(x)$	$df(x)$
1	C	0	9	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
2	x^p	$px^{p-1}dx$	10	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
3	a^x	$a^x \ln a\ dx$	11	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}dx$
4	$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}dx$	12	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^2}dx$
5	$\sin x$	$\cos x\,dx$	13	$\ln x$	$\frac{1}{x}dx$
6	$\cos x$	$-\sin x\,dx$	14	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}dx$
7	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}dx$	15	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$
8	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}dx$			

Эрежелер

1. $d\big(C\cdot f(x)\big)=C\cdot df(x)$;

2. $d(f\pm g)=df\pm dg$;

3. $d(f\cdot g)=g\cdot df+f\cdot dg$;

4. $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g\cdot df-f\cdot dg}{g^2}$.

3 – нү далилдейли.

$$d(f\cdot g)=(f\cdot g)'dx=(g\cdot f'+f\cdot g')dx=g\cdot f'dx+f\cdot g'dx=g\cdot df+f\cdot dg\,.$$

8.12. Дифференциалдын формасынын инварианттуулугу

Дифференциалды аныктоодо $y=f(x)$ функциясындагы x аргументин көз каранды эмес чоңдук деп эсептедик. $x=\varphi(t)$ болсо (8.10.2) формуласы өз формасын сактайбы? – деген суроо коелу.

$y=f(\varphi(t))$ функциясын карайлы.

$$dy=\left(f(\varphi(t))\right)'dt=f'_x\cdot\varphi'_t\cdot dt\,,$$

$dx=\varphi'_t\cdot dt$ болгондуктан

$$dy=f'_x\cdot dx\,.$$

Бул барабардык көрсөткөндөй диференциалдын мурдагы формасына ээ болдук. Бул касиет диференциалдын формасынын инварианттуулугу деп аталат.

8.13. Дифференциалды жакындаштырып эсептөөдө колдонуу

$y=f(x)$, $x\in X$ берилсин. $x_1\in X$ алалы, бул чекиттеги функциянын мааниси $f(x_1)$ ди эсептөө талап кылынсын.

Бул маанини ар дайым эле так эсептөө мүмкүн боло бербейт. Мисалы $f(x)=\sqrt{x}$, $x_1=4{,}01$ болсо, $\sqrt{4{,}01}$ маанисин табуу жеңил эле аткарылбайт.

Коюлган маселени чечүү үчүн x_1 чекитин $x_1=x_0+\Delta x$ түрүндө туюнтуу мүмкүн деп эсептейли. x_0 чекитиндеги функциянын өсүндүсүн жазалы

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x_1)-f(x_0)\,.$$

$f(x)$ функциясы x_0 чекитинде дифференциалданууччу болсун. Теорема 56 нын негизинде

$$\Delta y=dy+o(\Delta x)\,.$$

Δx жетишээрлик кичине болсо $\Delta y\approx dy$ деп алууга болот. Мындан

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_1)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x \qquad (8.13.1)$$

формулага ээ болобуз. Бул формула дифференциалды жакындаштырып эсептөөдө колдонуу формуласы деп аталат.

(8.13.1) ди колдонууга мисалдар келтирели.

1. $\sqrt{4{,}01}$ эсептегиле.

$f(x) = \sqrt{x}$ фукциясын карайлы. $x_0 = 4$, $\Delta x = 0{,}01$ деп алалы. (8.13.1) ди колдонсок

$$\sqrt{4{,}01} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0{,}01 = 2 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}01 = 2 + 0{,}25 \cdot 0{,}01 = 2{,}0025, \ \sqrt{4{,}01} \approx 2{,}0025.$$

2. $\ln 1{,}02$. $f(x) = \ln x$ жана $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}02$ деп эсептейли.

$$\ln 1{,}02 \approx \ln 1 + \frac{1}{1} \cdot 0{,}02 = 0 + 0{,}02 = 0{,}02, \ \ln 1{,}02 \approx 0{,}02.$$

8.14. Жогорку тартиптеги туундулар жана дифференциалдар

$y = f(x)$, $x \in X$ берилип, $f(x)$ функциясынын X көптүгүндөгү $f'(x)$ тундусу жашасын. $f'(x)$ өз кезегинде x тен функция болгондуктан $f'(x)$ тин туундусун табуу маселесин койсок болот. $f'(x)$ тин туундусу жашасын, б.а. $(f'(x))'$. Бул туундуну $f(x)$ тин экинчи тартиптеги туундусу деп атайбыз

$$(f'(x))' = f''(x)$$

түрдө белгилейбиз.

$f''(x)$ функциясынын туундусу жашаса, анда ал $f(x)$ тин үчүнчү тартиптеги туундусу деп аталып

$$(f''(x))' = f'''(x)$$

түрдө белгиленет. Бул процессти улантууга мүмкүнчүлүк болсо $(f^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x)$ – n - тартиптеги туундуга ээ болобуз.

М и с а л д а р. 1. $f(x) = a^x$.

$$f'(x) = a^x \ln a, \ f''(x) = (a^x \ln a)' = a^x \ln^2 a, \ f^{(n)}(x) = a^x \ln^n a.$$

$f(x) = e^x$ болсо, $f^{(n)}(x) = e^x$.

2. $y = x^p$, $p \in R$. $y' = px^{p-1}$, $y'' = p(p-1)x^{p-2}, \ldots,$ $y^{(n)} = p(p-1) \cdot \ldots \cdot (p-n+1)x^{p-n}$.

$p = -1$ десек, анда

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = -1(-2) \cdot \ldots \cdot (-n)x^{-1-n} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{1+n}}.$$

3. $y=\sin x$. $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$,

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ldots,\ y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

4. $y=\cos x$. $y'=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$,

$$y''=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ldots,\ y^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Жогорудагыдай эле жолдор аркылуу жогорку тартиптеги дифференциалдар аныкталат.

$$dy=y'dx,\ d^2y=d(dy)=(y'dx)'dx=y''dx^2,\ \ldots,$$

$$d^ny=d(d^{n-1}y)=(y^{(n-1)}dx^{n-1})'dx=y^{(n)}dx^n.$$

Биз жогоруда $f(x)$ функциясында $x=\varphi(t)$ болгон учурда да биринчи тартиптеги дифференциал өз формасын сактаарын көрсөттүк. Бул касиет (инварианттуулук) жогорку тартиптеги дифференциалдар үчүн да сакталабы? – деген суроону коелу.

$y=f(\varphi(t))$ функциясын карайлы.

$dy=f'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=f'_xdx$ болот. Экинчи тартиптеги дифференциалды табалы

$$d^2y=d(dy)=d(f'_xdx)=(df'_x)dx+f'_xd(dx)=f''_{x^2}dx^2+f'_xd^2x.$$

Экинчи тартиптеги дифференциал өз формасын жоготпосо, $d^2y=f''_{x^2}dx^2$ болууга тийиш эле, бирок мындай болгон жок. Демек жогорку тартиптеги дифференциалдар үчүн инварианттуулук форма сакталбайт.

М и с а л. $y=f(x)=x^3$ берилсин. $dy=3x^2dx$, $d^2y=6xdx^2$.

$x=t^2$ дейли, анда $y(t)=t^6$, $dy=6t^5dt$, $d^2y=30t^4dt^2$.

$$dy=6t^5dt=3t^4\cdot 2tdt=3x^2dx,$$

б.а. биринчи дифференциал өз формасын жоготкон жок.

Экинчи дифференциалды алалы. Биринчи жол.

$d^2y=30t^4dt^2$. Эгерде бул дифференциал өз формасын жоготпосо, анда $d^2y=6xdx^2$ түрүндө болууга тийиш.

$$d^2y=30t^4dt^2=6xdx^2-6xdx^2+30t^4dt^2=6xdx^2-6t^2(2tdt)^2+30t^4dt^2=$$

$$= 6xdx^2 - 24t^4dt^2 + 30t^4dt^2 = 6xdx^2 + 6t^4dt^2 = 6xdx^2 + 3t^4(2dt^2) = 6xdx^2 + (x^3)'d^2x,$$

б.а. дифференциал өз формасын сактаган жок.

Экинчи жол.

$d^2y = 6xdx^2$ формулада $x = t^2$ десек, анда $dx = 2tdt$. Демек

$$d^2y = 6t^2(2tdt)^2 = 6t^4 4t^2dt^2 = 24t^4dt^2.$$

$d^2y = 30t^4dt^2$ формуласы келип чыккан жок.

9. Дифференциалдык эсептөөнүн негизги теоремалары

9.1. Орто маани жөнүндөгү теоремалар

Ф е р м а н ы н т е о р е м а с ы 57. $f(x)$ функциясы X көптүгүндө аныкталган жана дифференциалдануучу, ички x_0 чекитинде эң чоң (кичине) мааниге ээ болсо, анда $f'(x_0) = 0$ болот.

Д а л и л д ө ө. $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде эң чоң мааниге ээ болсун, б.а. $\forall x \in X : f(x) \le f(x_0)$. x_0 чекитиндеги бир жактуу туундуларды табалы.

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0 - 0) \le 0,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0 + 0) \ge 0.$$

x_0 чекитинде $f'(x_0)$ жашагандыктан, жогорудагы барабарсыздыктарды жана

$$f'(x_0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0)$$

эске алсак $f'(x_0) = 0$ болоору келип чыгат.

Р о л л д у н т е о р е м а с ы 58. 1. $f(x)$ функциясынын $[a,b]$ да чектүү $f'(x)$ туундусу жашасын. 2. $f(a) = f(b)$. Бул шарттар аткарылганда x_0 $(a < x_0 < b)$ чекити жашап $f'(x_0) = 0$ болот.

Д а л и л д ө ө. $f(x)$ функциясы $[a,b]$ да үзгүлтүксүз. Вейерштрасстын экинчи теоремасы боюнча $f(x)$ бул аралыктын кандайдыр бир чекиттеринде эң чоң (M) жана эң кичине (m) маанилерге ээ болот. Төмөндөгүдөй учурлардын болушу мүмкүн.

1. $M = m$. $\forall x \in [a,b] : m \le f(x) \le M$ аткарылууга тийиш, демек $f(x) \equiv M$. мындан $\forall x \in [a,b] : f'(x) = 0$.

2. $M > m$. $f(a) = f(b)$ болгондуктан функция эң чоң жана эң кичине маанилерин $[a,b]$ нын ички чекиттеринде кабыл алат. Ферманын теоремасы боюнча бул чекиттерде $f'(x) = 0$ болот. Теорема далилденди.

Л а г р а н ж д ы н т е о р е м а с ы 59. $f(x)$ функциясынын $[a,b]$ аралыгында чектүү $f'(x)$ туундуга ээ болсун анда x_0 $(a < x_0 < b)$ чекити табылып

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0). \qquad (9.1.1)$$

Д а л и л д ө ө. $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ функцияны түзөлү. $F(x)$ $[a,b]$ аралыгында Роллдун теоремасынын баардык шарттарын канааттандырат. Демек x_0 $(a < x_0 < b)$ чекити жашап

$$F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

болот. Бул барабардыктан теореманын тууралыгы келип чыгат.

Лагранждын теоремасын $[x_0, x_0 + \Delta x]$ аралыгында колдонолу

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(c), \ x_0 < c < x_0 + \Delta x.$$

Мындан

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta x \cdot f'(c).$$

$$x_0 < c < x_0 + \Delta x \ \Rightarrow \ 0 < c - x_0 < \Delta x \ \ (\Delta x > 0) \ \Rightarrow \ 0 < \frac{c - x_0}{\Delta x} < 1.$$

$\dfrac{c - x_0}{\Delta x} = \theta$ деп белгилесек, $0 < \theta < 1$, $c = x_0 + \theta \cdot \Delta x$ болот. Бул барабардыкты эске алсак жогорудагы формуланы төмөндөгүдөй жаза алабыз

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x. \qquad (9.1.2)$$

(9.1.1)-(9.1.2) Лагранждын же чектүү өсүндү формулалары деп аталышат.

К о ш и н и н т е о р е м а с ы (чектүү өсүндү жөнүндөгү жалпыланган теорема) 60. $f(x)$, $g(x)$ функциялары $[a,b]$ аралыгында чектүү $f'(x)$, $g'(x) \neq 0$ туундуларга ээ болсо, анда x_0 $(a < x_0 < b)$ чекити табылып

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

формула орун алат.

Д а л и л д ө ө. Теореманын шарты боюнча $g'(x) \neq 0$ болгондуктан $g(b) - g(a) \neq 0$ болот.

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

функциясын түзөлү. $F(x)$, $[a,b]$ аралыгында Роллдун теоремасынын шарттарын канааттандырат. Демек x_0 $(a < x_0 < b)$ чекити жашап

$$F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x_0) = 0$$

аткарылат. Алынган барабардык теореманын тууралыгын тастыктайт.

9.2. Тейлордун формуласы

1. Көп мүчө үчүн Тейлорду формуласы

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (9.2.1)$$

көп мүчөсү берилсин.

(9.2.1) көп мүчөнү n жолу дифференциалдайлы

$$P_n'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1,$$

$$P_n''(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \ldots + 2a_2,$$

$$P_n'''(x) = n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3) a_{n-1} x^{n-4} + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot 3 a_3,$$

. . . .

$$P_n^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot a_n .$$

Алынган формулаларда $x = 0$ деп алуу менен көп мүчөнүн коэффициенттеринин, көп мүчөнүн жана анын туундуларынын $x = 0$ чекитиндеги маанилери аркылуу туюнтулушуна ээ болобуз.

$$a_0 = P_n(0), \; a_1 = P_n'(0), \; a_2 = \frac{1}{2!} P_n''(0), \; a_3 = \frac{1}{3!} P_n'''(0), \; \ldots, \; a_n = \frac{1}{n!} P_n^{(n)}(0).$$

Коэффициенттердин алынган маанилерин (9.2.1) ге коюп төмөндөгүнү алабыз

$$P_n(x) = \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots + \frac{P_n'''(0)}{3!} x^3 + \frac{P_n''(0)}{2!} x^2 + \frac{P_n'(0)}{1!} x + P_n(0). \qquad (9.2.2)$$

(9.2.2) формула (9.2.1) ден коэффициенттердин жазылышы менен айырмаланат. (9.2.2) ни Маклорендин формуласы деп аташат.

$$Q_n(x) = b_n(x-x_0)^n + b_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \ldots + b_1(x-x_0) + b_0, \qquad (9.2.3)$$

берилсин, $x_0 - const$.

$x - x_0 = y$ деп белгилейли. $x = x_0 + y$, $Q_n(x) = Q_n(x_0 + y) \equiv M_n(y)$ белгилөөсүн киргизсек, анда

$$M_n(y) = b_n y^n + b_{n-1} y^{n-1} + \ldots + b_1 y + b_0. \qquad (9.2.4)$$

(9.2.4) жана (9.2.2) ни салыштыралы, натыйжада

$$b_n = \frac{M_n^{(n)}(0)}{n!},\ b_{n-1} = \frac{M_n^{(n-1)}(0)}{(n-1)!},\ \ldots,\ b_1 = M_n'(0),\ b_0 = M_n(0)$$

алабыз. Бирок $M_n^{(k)}(0) \equiv Q_n^{(k)}(x_0)$ $(k = \overline{0,n})$ болгондуктан

$$b_k = \frac{M_n^{(k)}(0)}{k!} = \frac{Q_n^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k = \overline{0,n})$$

болот. Демек (9.2.3) көп мүчөнүн коэффициенттери, көп мүчө жана анын туундуларынын $x = x_0$ чекитиндеги маанилери аркылуу туюнтулду. Алынган коэффициенттердин маанилерин (9.2.3) кө коюп

$$Q_n(x) = \frac{Q_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{Q_n^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \ldots + \frac{Q_n'(x_0)}{1!}(x-x_0) + Q_n(x_0) \quad (9.2.5)$$

алабыз.

(9.2.5) ни Тейлордун формуласы деп аташат.

2. Каалагандай функция үчүн Тейлордун формуласы

$y = f(x)$, $x \in X$ берилсин. $x_0 \in X$ чекитти алалы.

x_0 чекитинде жана анын кандайдыр бир чекебелинде $f(x)$ функциясынын $(n+1)$ – тартипке чейинки баардык туундулары жашасын. Жогоруда каралган учурдагыдай эле төмөндөгү көп мүчөнү түзөлү

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (9.2.6)$$

(9.2.6) көп мүчөнүн жана $f(x)$ функциясынын x_0 чекитиндеги маанилери жана туундуларынын маанилери дал келет. Бирок x_0 чекитинин чекебелинде $P_n(x)$ $f(x)$ деп айтууга болбойт (мисал келтирип көрсө да болот: $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$). Демек $P_n(x)$ көп мүчөсү $f(x)$ функциясына кандайдыр бир даражада гана жакын боло алат.

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

деп белгилейли. $r_n(x)$ калдык мүчө деп аталат.

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x) \qquad (9.2.7)$$

түрүндө жазууга болот. $r_n(x)$ белгисиз функция болгондуктан бул функцияны табуу маселесин коелу.

Шарт боюнча $f(x)$ функциясынын X көптүгүндө $(n+1)$ – тартипке чейинки туундулары жашайт. $[x_0, x]\ (x > x_0) \subset X$ аралыгын алалы жана бул аралыкта аныкталган

$$\varphi(z) = f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}(x-z) - \frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2 - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n.$$

функциясын карайлы. Төмөндөгүлөрдү табалы

$$\varphi(x_0) = r_n(x),\ \varphi(x) = 0$$

$$\varphi'(z) = -f'(z) - \left[\frac{f''(z)}{1!}(x-z) - \frac{f'(z)}{1!}\right] - \left[\frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2 - \frac{f''(z)}{2!}2(x-z)\right] - \ldots -$$

$$-\left[\frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(z)}{(n-1)!}(n-1)(x-z)^{n-2}\right] - \left[\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}n(x-z)^{n-1}\right] =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n,\ \varphi'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n.$$

Каалагандай $\psi(z)$ функциясын алалы. Бул функция $[x_0, x]$ аралыгында үзгүлтүксүз жана (x, x_0) те $\psi'(z) \neq 0$ туундуга ээ болсун.

$\varphi(z)$ жана $\psi(z)$ функциялары үчүн Кошинин (жалпыланган чектүү өсүндү жөнүндөгү) теоремасын колдонолу

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)},\ c = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1.$$

Мындан

$$-\frac{r_n(x)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = -\frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{n!\psi'(c)} \quad \text{же}$$

$$r_n(x)=\frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\psi'(c)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n. \qquad (9.2.8)$$

$\psi(z)=(x-z)^{n+1}$ деп алалы. $\psi(z)$ ке коюлган шарттардын баардыгы аткарылат

$$\psi(x)=0,\ \psi(x_0)=(x-x_0)^{n+1},\ \psi'(c)=-(n+1)(x-c)^n.$$

Табылгандарды эске алсак (9.2.8) формуланы төмөндөгүдөй көрүнүштө жаза алабыз

$$r_n(x)=\frac{-(x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x-c)^n}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}. \qquad (9.2.9)$$

(9.2.9) ду эске алсак (9.2.7) төмөндөгүдөй түргө келет

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (9.2.10)$$

(9.2.10) формула, калдык мүчөсү Лагранж формасында болгон Тейлордун формуласы деп аталат.

Калдык мүчөнүн башка формаларын табалы. $\psi(z)=x-z$ деп алсак

$$\psi(x_0)=x-x_0,\ \psi(x_0)=0,\ \psi'(z)=-1\neq 0.$$

(9.2.8) төмөндөгүдөй көрүнүштү алат

$$r_n(x)=\frac{-(x-x_0)}{-1}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot(x-x_0)(x-x_0-\theta(x-x_0))^n=$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}\cdot(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n. \qquad (9.2.11)$$

(9.2.11) – Коши формасындагы калдык мүчө деп аталат.

$f^{(n+1)}(x)$ – туунду x_0 чекитинин чекебелинде үзгүлтүксүз деп эсептейли. $x\to x_0$ болсун. Мындай болгондо (9.2.9) формуласыда $c\to x_0$. Демек $f^{(n+1)}(c)\to f^{n+1}(x_0)$, б.а.

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}+\alpha(x),\ \alpha(x)\to 0.$$

Жыйынтыгында

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+\alpha(x)(x-x_0)^{n+1}=$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+o\left((x-x_0)^{n+1}\right). \qquad (9.2.12)$$

(9.2.12) – Пеано формадагы калдык мүчө деп аталат.

(9.2.10) формулага кайрылалы. Мында $x-x_0=\Delta x$ деп белгилеп, $f(x_0)$ дү барабардыктын сол жагына өткөрөлү

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}.$$

$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta f(x_0)$ болгондуктан (функциянын өсүндүсү) төмөндөгүдөй ажыралмага ээ болобуз

$$\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1}. \qquad (9.2.13)$$

(9.2.13) функциянын өсүндүсүнүн ажыралмасы деп аталат.

(9.2.13) тө

$$f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)dx=df(x_0),\ f''(x_0)\Delta x^2=d^2f(x_0),\ldots,$$

$$f^{(n)}(x_0)\Delta x^n=d^nf(x_0),\ f^{(n+1)}(c)\Delta x^{n+1}=d^{n+1}f(c)$$

болоорун эске алсак

$$\Delta f(x_0)=df(x_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0)+...+\frac{1}{n!}d^nf(x_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(c) \qquad (9.2.14)$$

келип чыгат.

10. Функцияларды туундулардын жардамында изилдөө

10.1. Функциянын турактуулук шарты

$y=f(x),\ x\in X$ берилсин.

Т е о р е м а 61. Каалаган $x\in X$ үчүн $f'(x)=0$ шартынын аткарылышы $f(x)$ тин X те турактуу болушунун жетиштүү шарты болот.

Д а л и л д ө ө. $[x_0,x]\subset X$ боло тургандай $f(x)$ үчүн Лагранждын теоремасынын баардык шарттары аткарылат. Андыктан

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0),\ x_0<c<x.$$

Шарт боюнча $f'(c) = 0$ болгондуктан, $f(x) = f(x_0)$, б.а. X көптүгүнүн каалаган эки чекитиндеги функциянын маанилери өз ара барабар. Демек $f(x) = f(x_0) = const$.

10.2. Функциянын монотондуулук шарты

$y = f(x)$, $x \in X$ берилсин. Функциянын туундусуна карата, функциянын өсүүчү же кемүүчү болоорун аныктайлы.

Т е о р е м а 62. Каалагандай $x \in X$ үчүн $f'(x)$ жашап жана $f'(x) > 0$ болсо, анда $f(x)$ функциясы X те өсүүчү; $f'(x) < 0$ болсо, анда $f(x)$ функциясы X те кемүүчү болот.

Д а л и л д ө ө. Каалагандай $x_1, x_2 \in X$ алалы. $x_1 < x_2$ деп эсептеп $[x_1, x_2]$ аралыгын карайлы. Лагранждын формуласын жазалы

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1). \qquad (10.2.1)$$

Шарт боюнча $f'(x) > 0$ болсо, (10.2.1) ден $f(x_2) > f(x_1)$ болоору келип чыгат, б.а. $f(x)$ – өсүүчү; $f'(x) < 0$ болсо $f(x_2) < f(x_1)$ болот, б.а. $f(x)$ – кемүүчү.

10.3. Максимум жана минимумдар

$y = f(x)$, $x \in X$ берилсин. $x_0 \in X$ жана анын ички чекити болсун. $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ чекебелин карайлы.

А н ы к т о о. Каалагандай $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ үчүн $f(x) \le f(x_0)$ аткарылса (барабардык $x = x_0$ болгондо гана аткарылса), анда $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде максимумга ээ деп атайбыз.

А н ы к т о о. Каалагандай $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ үчүн $f(x) \ge f(x_0)$ аткарылса, анда $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде минимумга ээ деп атайбыз.

Аныктоодогу функция максимум жана минимумга ээ болгон чекиттерди максимум, минимум же экстремум чекиттери деп да аташат. Бул чекиттер жетишээрлик кичине чекебелде каралгандыктан локалдык экстремум чекиттери деп аталышат. $f(x)$ функциясы X көптүгүндө үзгүлтүксүз болуп, өсүүчү же кемүүчү болбосун. Мыдай шартта $f(x)$ бул көптүктө бир нече экстремум чекиттерине ээ болушу мүмкүн.

Функциянын туундусунун жардамында экстремумдарды табуу маселесин коелу.

Т е о р е м а 63 (экстремумдун зарыл шарты). x_0 чекити $f(x)$ үчүн экстремум чекити болсун жана $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ аралыгында $f'(x)$ жашасын. Бул шарттар аткарылганда $f'(x_0)=0$ болот.

Д а л и л д ө ө. $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ аралыгында Ферманын теоремасынын шарттары аткарылат. Демек $f'(x_0)=0$.

Теорема 63 төгү $f'(x_0)=0$ шарты экстремумдун жашашынын зарыл гана шартын туюнтат.

Мисалы $f(x)=x^3$ функциясын алалы. $f'(x)=3x^2=0$ десек, мындан $x=0$. Бул чекитте $f(x)=x^3$ экстремумга ээ болбойт, функция ар дайым өсүүчү.

$f'(x)=0$ шартын канааттандыруучу чекиттер жашаса, анда бул чекиттердин кайсыларында функция экстремумга ээ болоору кошумча изилдөөнү талап кылат.

Т е о р е м а 64 (биринчи эреже). $f'(x_0)=0$ жана $x_0-\delta<x<x_0$ болгон x тер үчүн $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$), $x_0<x<x_0+\delta$ болгон x тер үчүн $f'(x)<0$ ($f'(x)>0$) болсун. Бул шарттар аткарылганда x_0 чекитинде $f(x)$ максимумга (минимумга) ээ болот.

Д а л и л д ө ө. $(x_0-\delta, x_0)$ аралыгында $f'(x)>0$ болгондуктан, бул аралыкта $f(x)$ өсөт; $(x_0, x_0+\delta)$ үчүн $f'(x)<0$ болгондуктан кемийт, б.а. x_0 чекитинде $f(x)$ эң чоң мааниге (максимумга) ээ болот.

Теорема 64 көрсөтүп жаткандай x_0 чекити аркылуу өткөндө $f'(x)$ өз белгисин оңдон (терстен) терске (оңго) өзгөртсө, анда x_0 дө функция максимумга (минимумга) ээ болот. Эгерде туунду өз белгисин өзгөртпөсө, анда экстремумга ээ болбойт.

Эгерде $f(x)$ функциясынын x_0 чекитинин чекебелинде биринчи тартиптеги туундусу жана x_0 чекитинде экинчи тартиптеги туундусу жашаса, анда x_0 чекитинде экстремумдун жашашы жөнүндөгү маселе төмөндөгү теорема аркылуу чечилет.

Т е о р е м а 65 (экинчи эреже). Жогорудагы шарттар аткарылсын, анда $f''(x_0)>0$ болсо x_0 – минимум; $f''(x_0)<0$ болсо x_0 – максимум чекити болот.

Д а л и л д ө ө. Шарт боюнча x_0 чекитинин чекебелинде $f'(x)$ жана x_0 дүн өзүндө $f''(x_0)$ жашайт. Туундунун аныктоосу боюнча

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}.$$

$f''(x) > 0$ болсун. Предел оң мааниге ээ болсо, анда $\dfrac{f'(x)}{x - x_0}$ да оң мааниге ээ болууга тийиш (x_0 чекитинин кандайдыр бир чекебелинде).

1) $x_0 - \delta < x < x_0$ болсо $x - x_0 < 0$, демек $f'(x) < 0$;

2) $x_0 < x < x_0 + \delta$ болсо $x - x_0 > 0$, анда $f'(x) > 0$.

Биринчи тартиптеги туунду өз белгисин терстен оңго өзгөрттү. Теорема 64 боюнча x_0 – минимум чекити.

$f''(x_0) < 0$ маанисин болсо, x_0 максимум чекити болоору ушундай эле далилденет. Теорема далилденди.

Айрым учурларда $f(x)$ функциясынын x_0 чекитинде биринчи, экинчи тартиптеги туундулары нөлгө айланат. Мындай жагдайда x_0 экстремум чекити болобу? – деген суроого жооп берүү үчүн жогорку тартиптеги туундуларды колдонууга туура келет.

Т е о р е м а 66 (экстремумду табууда жогорку тартиптеги туундуларды колдонуу).

1. $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$;

2. x_0 чекитинде үзгүлтүксүз $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ жашасын.

Бул шарттар аткарылганда: 1) n – так болсо, x_0 чекитинде $f(x)$ экстремумга ээ болбойт;

2) n – жуп болсо жана $f^{(n)}(x_0) < 0$ болсо, x_0 чекити максимум; $f^{(n)}(x_0) > 0$ болсо x_0 – минимум чекити болот.

Д а л и л д ө ө. Теореманын шарттары боюнча $f(x)$ функциясы үчүн x_0 чекитинде Тейлордун формуласын, калдык мүчөсү Пеано формасында болгон, колдонууга мүмкүнчүлүк берет.

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right). \qquad (10.3.1)$$

(10.3.1) формула көрсөтүп жаткандай x чоңдугу x_0 гө жетишээрлик жакын болгондо ($f(x) - f(x_0)$) – чоңдугунун белгиси $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!}(x - x_0)^n$ туюнтмасынын белгиси менен дал келет.

1. $n = 2k - 1$, $k \in N$ (так) болсун. x чоңдугу x_0 аркылуу өткөндө $(x - x_0)^n$ туюнтмасынын белгиси терстен оңго өзгөрөт. Натыйжада $f^{(n)}(x_0)$ дүн белгиси кандай болсо да, $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!}(x - x_0)^n$ туюнтмасы өз белгисин өзгөртөт. Демек $f(x)$ функциясы x_0

чекитинин чекебелинде $f(x_0)$ дөн чоң жана кичине маанилерди кабыл алат, б.а. $f(x)$ x_0 дө экстремумга ээ боло албайт.

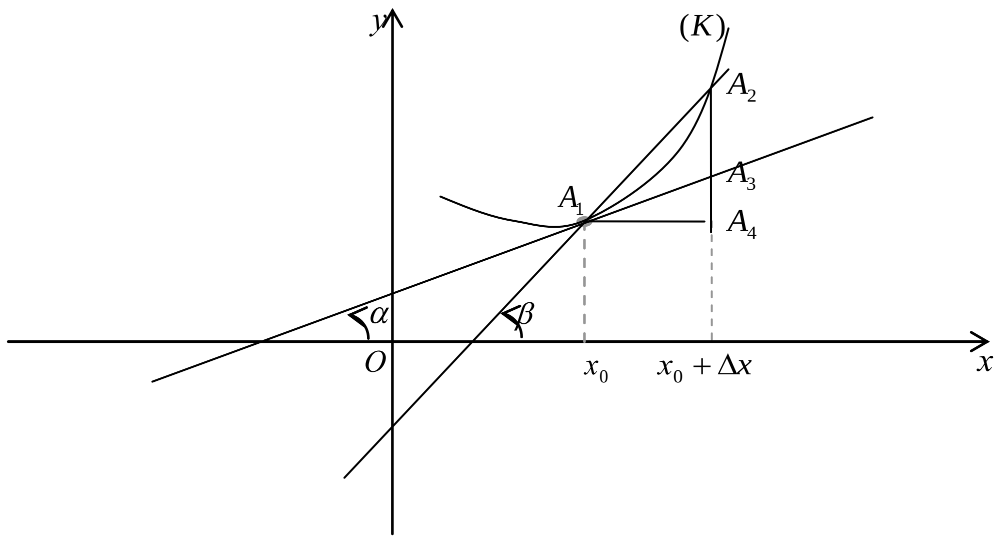
1. $n = 2k$, $k \in N$ (жуп болсун). Бул учурда $(x - x_0)^n$ өз белгисин өзгөртпөйт. ($f(x) - f(x_0)$) дин белгиси $f^{(n)}(x_0)$ дүн белгиси менен дал келет, б.а. $f^{(n)}(x_0) < 0$ болсо $f(x) - f(x_0) < 0$ (x_0 – максимум); $f^{(n)}(x_0) > 0$ болсо $f(x) - f(x_0) > 0$ (x_0 – минимум). Теорема далилденди.

10.4. Функциянын туундусу жашабай же чексиз болгон учурдагы экстремумдар

$y = f(x)$, $x \in X$ берилсин. x_0, X көптүгүнүн ички чекити болсун.

$f(x)$ функциясынын тик бурчтуу координаталар системасында графиги (K) берилсин. (K) ийрисинин $A_1(x_0, f(x_0))$ чекитине жүргүзүлгөн жаныма түшүнүгүн тактайлы. $f(x)$, X те дифференциалдануучу болсун. $A_2(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ чекитти алалы жана A_1, A_2 чекиттери аркылуу өткөн түз сызыкты жүргүзөлү. (A_1A_2) түз сызыгын кесүүчү деп атайлы. $\Delta x \to 0$ да A_2 чекити (K) ийриси боюнча жылып A_1 чекитине умтулат.

А н ы к т о о. $\Delta x \to 0$ да (A_1A_2) түз сызыгы ээлеген абал, A_1 чекитинде (K) ийрисине жүргүзүлгөн жаныма деп аталат.



Жаныманын теңдемесин табуу маселесин коелу. Теңдеме $y = kx + b$ көрүнүшүндө болсун, мында k, b – белгисиз сандар. k – түз сызыктын бурчтук коэффициенти деп аталат жана түз сызыктын Ox огунун оң багыты менен түзгөн бурчтун тангенсине барабар, б.а. $k = tg\alpha$.

Коюлган маселени чечүү үчүн тик бурчтуу $\Delta A_1 A_4 A_2$, $\Delta A_1 A_4 A_3$ үч бурчтуктарды карайлы. $(A_1 A_2)$ түз сызыктын бурчтук коэффициентин k_1 деп белгилесек,

$$k_1 = tg\beta = \frac{A_2 A_4}{A_1 A_4} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

болот. Демек

$$k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

$y = f'(x_0) \cdot x + b$ ээ болдук. b санын табуу үчүн, жаныма A_1 чекити аркылуу өткөндүктөн $y_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + b$ болууга тийиш. Мындан

$$b = y_0 - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Жыйынтыгында

$$y = f'(x_0) \cdot x + y_0 - f'(x_0) \cdot x_0 \quad \text{же}$$

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \qquad (10.4.1)$$

теңдемеге ээ болобуз.

(10.4.1) формуланы далилдөө көрсөтүп тургандай x_0 чекитиндеги $f(x)$ функциясынын туундусу (K) графигинин $(x_0, f(x_0))$ чекитине жүргүзүлгөн жаныманын бурчтук коэффициентин туюнтат.

Алынган жыйынтыктан төмөндөгүдөй сүйлөмдүн тууралыгы келип чыгат.

Эгерде $f'(x_0) = \pm\infty$ болсо, анда жаныма y огуна параллель (вертикалдык абалда) болот.

М и с а л ы. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ функциясынын $x = 0$ чекитиндеги туундусун табалы. Бир жактуу туундуларды карайлы

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}.$$

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}} = +\infty, \quad \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}} = +\infty$$

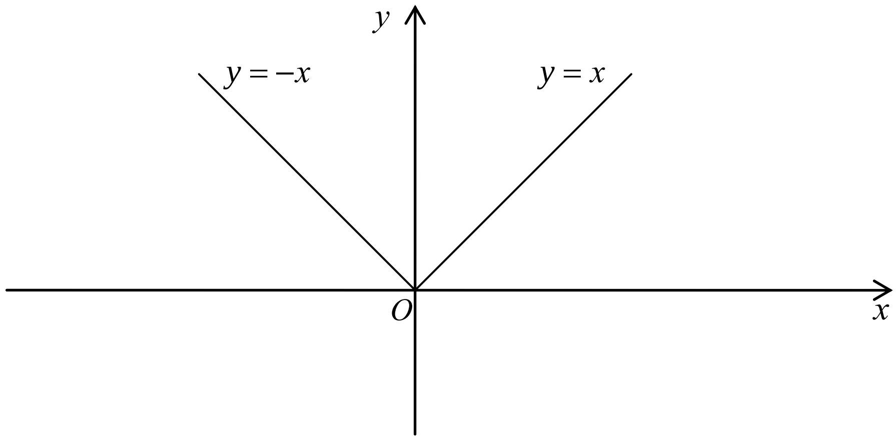
болгондуктан $f'(0)=+\infty$.

Айрым учурларда (функция үзгүлтүксүз болсо да) берилген чекитте функциянын графигине жаныма жүргүзүүгө мүмкүн болбогон учурлар кездешет.

М и с а л ы. $y=|x|$ берилсин $x=0$ чекитинде жаныманын теңдемесин жазуу маселесин коелу. Ал үчүн бул чекиттеги туундуну табалы.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x},\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=f'(0)$$

болгондуктан, бул пределди эсептөө үчүн $\Delta x>0$, $\Delta x<0$ учурларды карайлы. $\Delta x>0$ болгондо $\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$, $\Delta x<0$ болгондо $\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$. Бир жактуу туундулар барабар эмес, демек $x=0$ чекитинде функциянын туундусу (жанымасы) жашабайт. Бул учурда бир жактуу туундулар $x=0$ чекитинде функциянын графигине оң жана сол жактан жүргүзүлгөн (эки жаныма) жанымаларды туюнтат. Алар $y=-x$, $y=x$ түз сызыктары болуп эсептелишет. Эскерте кетүүчү нерсе бул учурда берилген функция $x=0$ чекитинде минимумга ээ болот.



Бир жактуу туундулар жашабай турган учурга мисал келтирели.

М и с а л. $y=x\cdot\sin\frac{1}{x}$, $x\neq 0$; $y=0$, $x=0$ болсун.

Бул функция $(-\infty,+\infty)$ те үзгүлтүксүз. $x=0$ чекитинде үзгүлтүксүздүктү далилдөө үчүн бир жактуу пределдерди кароо жетиштүү болот.

$$0\le\left|x\cdot\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|$$

болгондуктан, $x\to 0$ да

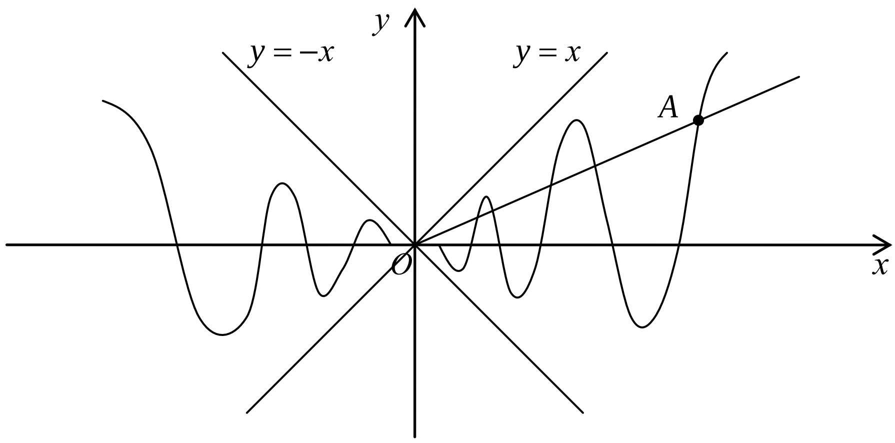
$$\lim_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$$

болот. Функциянын $x=0$ чекитиндеги мааниси да 0 гө барабар.

Берилген функциянын $x=0$ чекитиндеги туундусун табуу маселесин коелу.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x}.\ \lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{1}{\Delta x}=?.$$

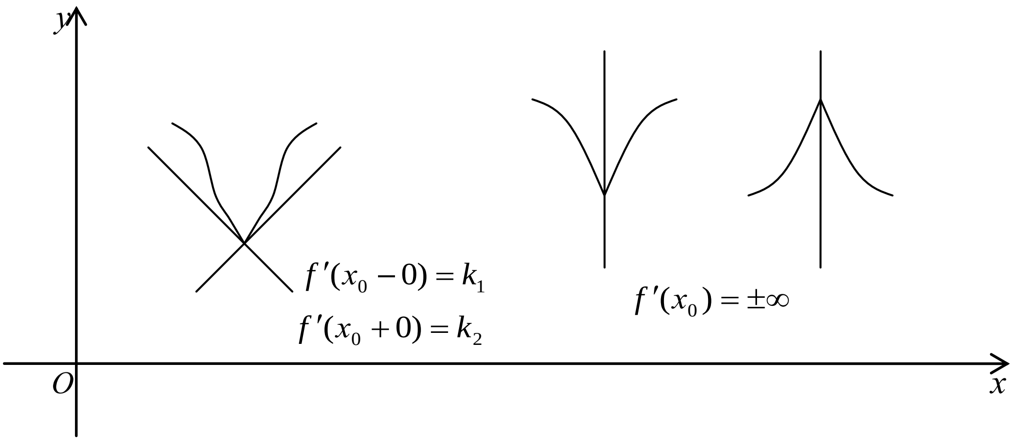
Бул пределдин Δx кандай гана жол менен 0 гө умтулса да мааниси жашабайт.



$y=f(x)$, $x\in X$ берилсин. $f'(x)$ ти функция катары карайлы. Жогоруда каралган мисалдардын натыйжасында төмөндөгүдөй жыйынтык чыгарууга болот.

$f'(x)$ функциясы экинчи түрдөгү гана үзүлүү чекиттерине ээ же үзгүлтүксүз функция болот.

Жогоруда каралган мисалдар жана акыркы жыйынтык көрсөтүп тургандай $f'(x)$ үзгүлтүксүз функция болсо экстремум чекиттери белгиленген эрежелердин негизинде табылат. Эгерде $f'(x)$ экинчи түрдөгү үзүлүү чекиттерине ээ болсо, анда бир жактуу туундулар жашаган, туунду чексиз болгон учурларда эстремум чекиттери жашашы мүмкүн. Аталган учурларда графиктер төмөн-дөгүдөй болот.


y
O
x
$f'(x_0-0)=k_1$
$f'(x_0+0)=k_2$
$f'(x_0)=\pm\infty$

10.5. Асимптоталар

М и с а л. 1. $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ функциясын карайлы.

$\lim\limits_{x\to\pm1}\dfrac{1}{x^2-1}=\infty$ же тагыраак айтканда

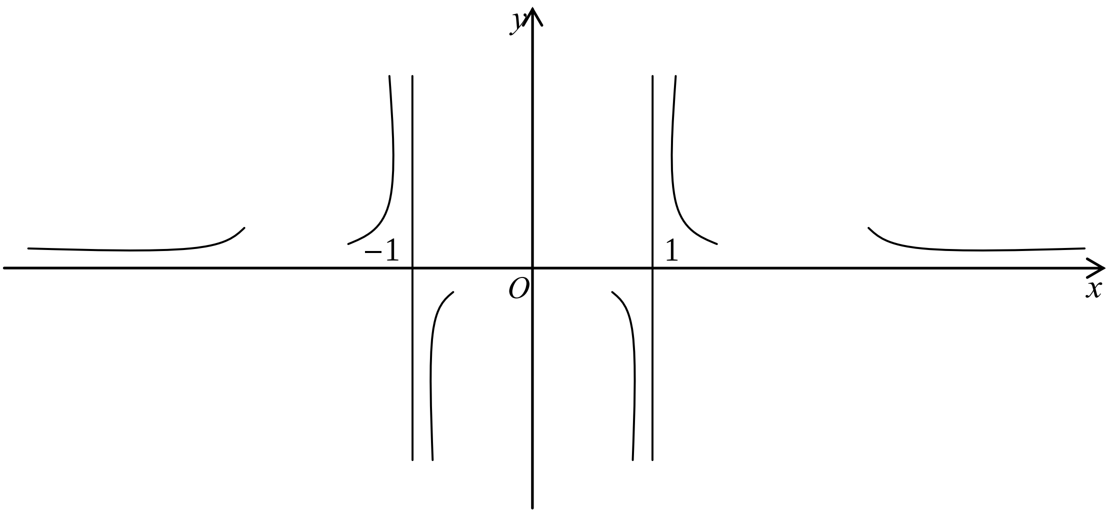
$$\lim_{x\to-1-0}\frac{1}{x^2-1}=\lim_{x\to-1+0}\frac{1}{x^2-1}=-\infty,\ \lim_{x\to1-0}\frac{1}{x^2-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x^2-1}=+\infty$$

болоорун далилдөөгө болот. Мындай жагдай баардык эле функцияларда кездеше бербейт.

2. $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ берилсин. $x\to\pm\infty$ да функциянын пределин табалы.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2+1}=0\,.$$

Каралган эки мисалда тең функциянын маанилери биринчи учурда чексизге, экинчи учурда турактуу санга умтулууда, тагыраак айтканда биринчи учурда функциянын маанилери $x=\pm1$ түз сызыгына, экинчи учурда x огуна жакындашууда. Геометриялык жактан айтылгандарды төмөндөгүдөй сүрөттөөгө болот.



Төмөндөгүдөй аныктоолорду кабыл алалы.

А н ы к т о о. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ болсо, анда $x=a$ түз сызыгы вертикалдык асимптота деп аталат.

А н ы к т о о. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$ болсо, анда $x=b$ түз сызыгы горизанталдык асимптота деп аталат.

Асимптоталар вертикалдык жана горизанталдык гана болбостон башкача түрдө да болушу мүмкүн.

М и с а л. 1. $f(x)=x+\frac{1}{x}$ функциясын карайлы. Бул функциянын $x\to\pm\infty$ гы абалын изилдейли.

($f(x)-x$) айырмасынын $x\to\pm\infty$ гы пределин табалы.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Демек x тин жетишээрлик чоң маанилеринде каралып жаткан функциянын өзгөрүү мүнөзү $y=x$ түз сызыгына жакын болот.

А н ы к т о о. $\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-b]=0$ аткарылса, анда $y=kx+b$ түз сызыгы $f(x)$ функциясынын жантык асимптотасы деп аталат.

Аныктоонун негизинде k , b турактуулары төмөндөгүдөй формулалар боюнча табылат

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx],\ k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Биз жогоруда караган учурларда асимптоталар түз сызыктар гана болушту. Асимптоталар түз сызык түрүндө (сызыктуу функция) гана болот деген түшүнүктөн алыс болуш үчүн төмөнкүдөй мисал келтирели.

М и с а л. 1. $f(x)=\frac{x^4+x+1}{x^2}$ функциясынын $x\to\infty$ гы абалын изилдейли. Ал үчүн төмөндөгүдөй өзгөртүп түзүүнү аткаралы

$$f(x)=\frac{x^4+x+1}{x^2}=x^2+\frac{x+1}{x^2}.$$

($f(x)-x^2$) айырманы түзөлү жана $\lim_{x\to\infty}(f(x)-x^2)$ пределин табалы

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-x^2)=0.$$

Демек $f(x)$ функциясы x тин жетишээрлик чоң маанилеринде x^2 функциясындай эле өзгөрөт (өзүн x^2 алып жүрөт). Мындай болгондо x тин чоң маанилеринде $f(x)$ тин ордуна x^2 ты алууга болот деген жыйынтыкка келебиз.

Ушул эле функциянын $x\to 0$ гы абалын изилдейли.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2}.$$

Экинчи жактан

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x+1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=1.$$

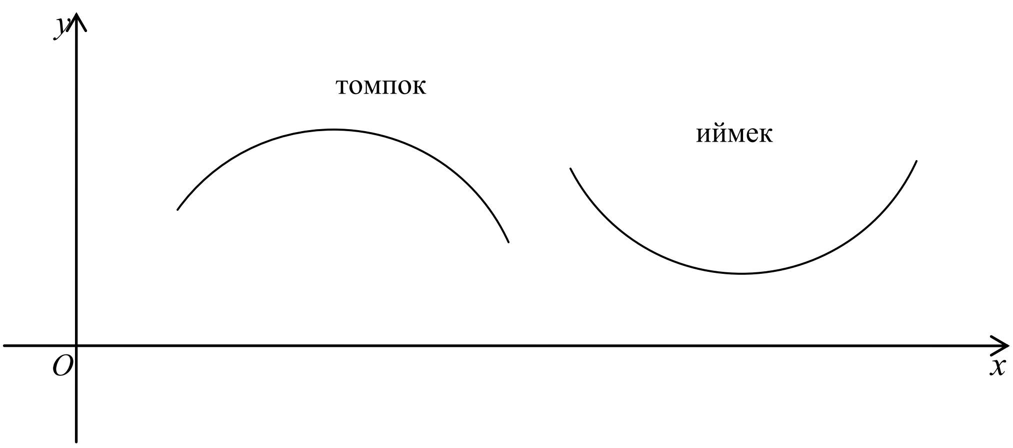
$x\to 0$ да $\frac{x+1}{x^2}$ жана $\frac{1}{x^2}$ эквиваленттүү чексиз чоң чоңдуктар. Жүргүзүлгөн изилдөөлөр көрсөткөндөй $f(x)$ функциясы x тин жетишээрлик кичине маанилеринде $\frac{1}{x^2}$ функциясындай эле өзгөрөт.

Жыйынтыктап айтканда $x\to\infty$ да $f(x)$ функциясынын башкы асимптоталык мүчөсү x^2; $x\to 0$ да $\frac{1}{x^2}$ болот.

Демек асимптотанын негизги идеясы кандайдыр бир чекиттин чекебелинде берилген функцияны өзгөрүшү боюнча бул функцияга жакын, бирок көрүнүшү (жазылышы) боюнча жөнөкөй функция менен алмаштыруу маанисинде түшүнсөк болот.

10.6. Ийметик, томпоктук интервалдары. Ийилүү чекиттери

$y=f(x)$, $x\in X$ берилип, бул функциянын графигин чийүү маселесин коелу. $f(x)$, X көптүгүндө дифференциалдануучу болсун, б.а. $f'(x)$ жашасын. Жогоруда каралып өткөндөй биринчи тартиптеги туундунун жардамында монотондуулук интервалдарды, экстремум чекиттерин табууга болот. Бирок бул табылган нерселер функциянын графигин толук мүнөздөй албайт. Графиктин айрым участкалары (бөлүктөрү) ийметиги Oy огуна карата жогору (томпок) же төмөн (иймек) багытталган болушу мүмкүн.



Ийринин мындай абалдарын биринчи тартиптеги туундунун чоңдугу, белгиси да аныктай албайт.

Кандай шарттарда ийринин мындай абалдарын аныктоого мүмкүн болоорун изилдейли.

А н ы к т о о. Каалаган $x_0 \in X$ үчүн

$$f(x_0+\Delta x) < f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x \ \ (\Delta x \neq 0) \qquad (10.6.1)$$

барабарсыздыгы аткарылса, анда X көптүгүндө $f(x)$ функциясынын графигин томпок деп атайбыз.

(10.6.1) барабарсыздыкты «>» белгисине алмаштырсак график иймек болот.

Келтирилген аныктоонун геометриялык мааниси төмөндөгүдөй: Каалаган $(x_0, f(x_0))$ чекитте жүргүзүлгөн жаныма графиктен жогор жагында жайгашса график томпок деп аталат.

Төмөндөгү теорема туура болот.

Т е о р е м а 67. Каалаган $x \in X$ үчүн $f''(x)$ жашап жана $f''(x) < 0$ болсо, график томпок; $f''(x) > 0$ болсо, иймек болот.

Д а л и л д ө ө. Каалагандай $x_0 \in X$ алалы. $x_0 + \Delta x \in X$ болсун. Тейлордун формуласын жазалы.

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x_0+\theta\cdot\Delta x) \ \ (0<\theta<1).$$

Мындан $\Delta x^2 > 0$ болгондуктан $f''(x) < 0$ болсо, анда

$$f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x < 0;$$

$f''(x) > 0$ болсо, анда

$$f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x > 0$$

болот. Аныктоонун негизинде биринчи учурда график томпок, экинчи учурда иймек. Теорема далилденди.

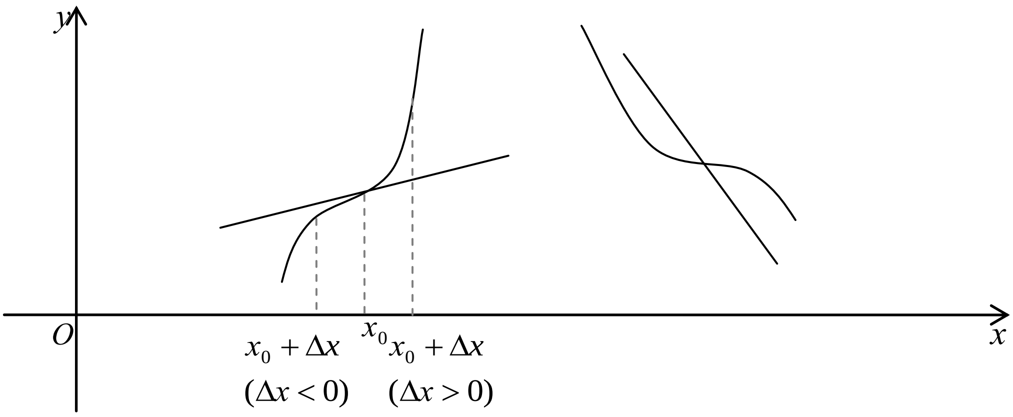
А н ы к т о о. Иймектик, томпоктук интервалдарынын чек аралары ийилүү чекити деп аталат.

Бул аныктоону аналитикалык формада төмөндөгүдөй айтууга болот.

А н ы к т о о. Кандайдыр бир $\varepsilon > 0$ саны жашап $0 < \Delta x < \varepsilon$ үчүн $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x > 0$ (< 0); $-\varepsilon < \Delta x < 0$ үчүн $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x < 0$ (> 0) болсо, анда x_0 ийилүү чекити деп аталат.

Бул аныктоонун геометриялык мааниси төмөндөгүдөй:

Δx тин оң жана терс маанилерине тиешелеш болгон графиктин бөлүктөрү, x_0 чекитинде жүргүзүлгөн жаныманын эки жак бөлүгүндө жатышат.



Т е о р е м а 68. $x = x_0$ чекитинде $f'(x)$ функциясы экстремумга ээ болсо, анда x_0 – ийилүү чекити болот.

Д а л и л д ө ө. $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x$ туюнтмасынын биринчи айырмасы үчүн Лагранждын теоремасын колдонолу

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x = f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x)\Delta x - f'(x_0)\Delta x = \left[f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x) - f'(x_0)\right] \cdot \Delta x .$$

$f'(x)$ функциясы x_0 чекитинде экстремумга ээ болгондуктан, $\left(f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x) - f'(x_0)\right)$ туюнтмасынын белгиси ар дайым туруктуу болот.

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x = \left[f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x) - f'(x_0)\right] \cdot \Delta x$$

туюнтмасынын белгиси Δx тин белгиси өзгөргөндө өзгөрөт. Аныктоонун негизинде x_0 ийилүү чекити болот.

$f'(x)$ функциясы x_0 чекитинде экстремумга ээ болгондуктан, $f''(x_0) = 0$ шарты аткарылууга тийиш. Демек ийилүү чекиттерин ушул шартты канааттандырган чекиттердин арасынан издөөгө тийишпиз.

10.7. Функцияны толук изилдөө жана графигин тургузуу

$y = f(x)$, $x \in X$ берилсин. Функциянын графигин тургузуу маселесин коелу. Бул маселени чечүү үчүн төмөндөгүлөрдү аткаруу жана табуу керек:

1. Аныкталуу жана өзгөрүү областтар.
2. Функциянын жуптугу, тактыгы, мезгилдүүлүгү.
3. Графиктин октор менен кесилиш чекитттери.
4. Монотондуулук интервалдары.
5. Экстремум чекиттери.
6. Ийметик, томпоктук интервалдары, ийилүү чекиттери.
7. Асимптоталар.
8. Функциянын белгилери турактуу болгон интервалдар.
9. Айрым мүнөздүү чекиттер.
10. Графикти тургузуу.

Графикти тургузуу алдында жыйынтык таблицаны түзүү максатка ылайыктуу.

y	X	Y	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$	$f(x) = 0$ $x = 0$	$f'(x) > 0$ $f'(x) < 0$ $f'(x) = 0$	$f''(x) > 0$ $f''(x) < 0$

11. Аныксыздыктарды ачууда туундуну колдонуу

(Лопиталь эрежелери)

11.1. $\frac{0}{0}$ аныксыздыгы

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ болсо, $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ аныксыздыгын берет. Бул көрүнүштөгү аныксыздыктарды ачуу үчүн төмөндөгүдөй теоремадан пайдаланабыз.

Т е о р е м а 69. 1. $f(x)$, $g(x)$ функциялары $(a, b]$ аралыгында аныкталсын 2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ 3. $(a, b]$ аралыгында $f'(x)$, $g'(x) \neq 0$ чектүү туундулары жашасын 4. $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ предели жашасын.

Бул шарттар аткарылганда $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ болот.

Д а л и л д ө ө. $f(a) = 0$, $g(a) = 0$ деп алалы. Мындай болгондо $f(x)$, $g(x)$ функциялары $[a, b]$ аралыгында үзгүлтүксүз болушат. Кошинин теоремасын колдонсок

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},\ a < c < b.$$

$g'(x) \neq 0$ шарты аткарылгандыктан $g(x) - g(a) \neq 0$ болот. $x \to a$ са $c \to a$ болгондуктан, бул барабардыктан

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

ээ болобуз. Теорема далилденди.

Теорема 69 да a чектүү болгон учурда карадык. $x \to \infty$ болгон учурда да алынган эреже туура бойдон калат.

Т е о р е м а 70. 1. $f(x)$, $g(x)$ функциялары $[x_0, +\infty)$ аралыгында аныкталсын 2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ 3. $[x_0, +\infty)$ аралыгында $f'(x)$, $g'(x) \neq 0$ чектүү туундулары жашасын 4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ болсун.

Бул шарттар аткарылганда $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$ болот.

Д а л и л д ө ө. $x = \dfrac{1}{t}$ деп эсептейли. $x \to +\infty$ болгондо $t \to 0 + 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{t \to 0+0} f\left(\frac{1}{t}\right) = 0,\ \lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{t \to 0+0} g\left(\frac{1}{t}\right) = 0$$

болот.

$$\lim_{t \to 0+0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \to 0+0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t \to 0+0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = A,$$

демек

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Теорема далилденди.

11.2. $\frac{\infty}{\infty}$ аныксыздыгы

$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ болсо, анда $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ предели $\frac{\infty}{\infty}$ аныксыздыгын берет. Мындай аныксыздыктарды ачууда төмөндөгү теорема аныктаган эрежени колдонууга болот.

Т е о р е м а 71. 1. $f(x)$, $g(x)$ функциялары $(a,b]$ аралыгында аныкталсын 2. $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ 3. $(a,b]$ аралыгында чектүү $f'(x)$, $g'(x)\neq 0$ туундулары жашасын 4. $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ болсун.

Бул шарттар аткарылганда $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A$ болот.

Д а л и л д ө ө. 2 – шарттын негизинде $f(x)>0$, $g(x)>0$ деп эсептейли. A – чектүү болсун. 4 – шарт боюнча, каалаган $\varepsilon>0$ үчүн кандайдыр $\delta>0$ жашап $a<x<a+\delta$ барабарсыздыгын канааттандырган x тер үчүн

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{11.2.1}$$

аткарылат. $a+\delta=x_0$ жана каалагандай x $(a<x<x_0)$ алалы, $[x,x_0]$ аралыгында Кошинин формуласын колдонолу

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\ x<c<x_0.$$

(11.2.1) барабарсыздыгын эске алсак

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Төмөндөгүдөй теңдештикти жазалы

$$\frac{f(x)}{g(x)}-A=\frac{f(x_0)-A\cdot f(x_0)}{g(x)}+\left[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right]\cdot\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}-A\right].$$

$x\to a$ да $g(x)\to\infty$ болгондуктан $\delta_1>0$ жашап $a<x<a+\delta_1<x_0$ үчүн $g(x)>g(x_0)$ жана

$$\left|\frac{f(x_0)-A\cdot f(x_0)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

аткарылат. Демек $a<x<a+\delta_1$ аралыгында

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

болот.

A – чексиз болсун, б.а. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$. Демек

$$\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0 \text{ же } \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0 \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty .$$

Теорема далилденди.

Теорема 69, 70, 71 аныктаган эрежелер Лопиталь эрежелери деп аталышат.

11.3. Аныксыздыктардын башка түрлөрү

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ болсо, $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)$ предели $0\cdot\infty$ аныксыздыгын берет. Бул аныксыздыкты $\dfrac{0}{0}$ же $\dfrac{\infty}{\infty}$ келтирүүнүн жолун карайлы.

$f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ болгондуктан $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$, $\dfrac{0}{0}$ аныксыздыгын берет. Теорема 69 ду колдоно алабыз.

$f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ өзгөртүүсүн жүргүзсөк $\dfrac{\infty}{\infty}$ аныксыздыгын алабыз.

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ болсо, анда $\big(f(x)-g(x)\big)$ – туюнтмасы $(\infty-\infty)$ аныксыздыгын берет.

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\dfrac{1}{g(x)}}=\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}\cdot\dfrac{1}{g(x)}}$$

өзгөртүүсүн аткарсак, акыркы туюнтма $\dfrac{0}{0}$ аныксыздыгын берет.

3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ болсо, $f(x)^{g(x)}$ туюнтмасы 0^0 аныксыздыгын берет. $x\neq a$ үчүн $f(x)>0$ деп эсептейбиз.

$f(x)^{g(x)}$ туюнтмасын өзгөртүп түзөлү.

$u(x)=f(x)^{g(x)}$ деп алсак, анда

$$\ln u(x) = g(x) \cdot \ln f(x) = \frac{\ln f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}.$$

Акыркы туюнтма $\frac{\infty}{\infty}$ аныксыздыгын берет.

Анык эмес интеграл

12. Алгачкы функция жөнүндө түшүнүк жана анык эмес итеграл

Бул бөлүктөгү биздин негизги максатыбыз функциянын туундусу боюнча функциянын өзүн табуу эсептелет.

12.1. Алгачкы функция жөнүндө түшүнүк

(a,b) интервалында аныкталган $F(x)$, $f(x)$ функциялары берилсин.

А н ы к т о о. $\forall x \in (a,b)$ үчүн $F'(x) = f(x)$ барабардыгы аткарылса, анда $F(x)$ функциясы $f(x)$ үчүн алгачкы функция деп аталат.

М и с а л д а р. 1. $F(x) = \sin x$ функциясы $f(x) = \cos x$ үчүн $(-\infty,+\infty)$ интервалында алгачкы функция болот.

Чындыгында $(\sin x)' = \cos x$.

2. $F(x) = e^x$, $f(x) = e^x$. $(e^x)' = e^x$.

3. $F(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Эгерде $F(x)$ функциясы $f(x)$ үчүн алгачкы функция болсо, анда $F(x)+C$, $C - const$ да алгачкы функция болот,

$$\left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x).$$

Бир эле $f(x)$ функциясы үчүн алгачкы функциялар өз ара кандай байланышкан?

Т е о р е м а 72. (a,b) интервалында $F_1(x)$, $F_2(x)$ функциялары $f(x)$ үчүн каалагандай алгачкы функциялар болсо, анда $F_1(x) - F_2(x) = C - const$, б.а. каалагандай алгачкы функциялар турактуу санга гана айырмаланышат.

Д а л и л д ө ө. $F(x)=F_1(x)-F_2(x)$ деп белгилейли. Шарт боюнча (a,b) интервалында $F_1(x)=f(x)$, $F_2(x)=f(x)$ жашагандыктан

$$F'(x)=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Функциянын туруктуулугу жөнүндөгү теореманын негизинде $F(x)=C-const$. Демек $F_1(x)-F_2(x)=C$. Теорема далилденди.

Бул теореманын негизинде төмөндөгүдөй жыйынтык чыгарууга болот.

Ж ы й ы н т ы к. $F(x)$ функциясы $f(x)$ үчүн кандайдыр бир алгачкы функция болсо, анда каалагандай алгачкы функция $F(x)+C$ көрүнүшүндө болот.

12.2. Анык эмес интеграл

А н ы к т о о. $\{F(x)+C,\ x\in(a,b)\}$ көптүгү $f(x)$ функциясынын (a,b) интервалындагы анык эмес интегралы деп аталат.

$$\int f(x)dx \qquad (12.2.1)$$

символу аркылуу белгиленет.

(12.2.1) белгилөөсүндө « $\int$ » – интегралдын белгиси, $f(x)dx$ – интеграл ичиндеги туюнтма, ал эми $f(x)$ – интеграл ичиндеги функция деп аталат.

Жогорудагы жыйынтыкты эске алсак, анда

$$\int f(x)dx=F(x)+C. \qquad (12.2.2)$$

Эгерде (a,b) интервалында $f(x)$ үчүн $F(x)$ алгачкы функциясы жашаса, анда $f(x)dx$ туюнтмасы $F(x)$ тин дифференциалы болот.

Чындыгында $f(x)dx=F'(x)dx=dF(x)$.

М и с а л д а р. 1. $\int\cos xdx=\sin x+C$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

2. $\int e^x dx=e^x+C$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

3. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+C$, $x\in(-1,1)$.

12.3. Анык эмес интегралдын касиеттери

1^0. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

2^0. $\int dF(x) = F(x) + C$.

1^0 далилдейли (12.2.2) теңдештигин дифференциалдайлы

$$d\int f(x)dx = d\big(F(x)+C\big) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

2^0 далилдейли $dF(x) = f(x)dx$ болгондуктан

$$\int f(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C.$$

3^0. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

4^0. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx$, $C - const$.

12.4. Анык эмес интегралдын негизги таблицалары

Туундулардын таблицасын жана анык эмес интегралдын аныктоосун эске алуу менен төмөндөгүдөй таблицаны түзүүгө болот.

1. $\int 0dx = C$.

2. $\int 1dx = x + C$.

3. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $(\alpha \neq -1)$.

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$

11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C, \\ -arcctgx + C. \end{cases}$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$.

13. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C$.

14. $\int \mathrm{sh}xdx = \mathrm{ch}x + C$.

15. $\int \mathrm{ch}xdx = \mathrm{sh}x + C$.

16. $\int \dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = thx + C$.

17. $\int \dfrac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -cthx + C$.

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

13. Интегралдоонун негизги методдору

13.1. Өзгөрүлмөнү алмаштыруу аркылуу интегралдоо

Т е о р е м а 73. 1. $t=\varphi(x)$ функциясы X көптүгүндө аныкталган жана дифференциалдануучу, T – бул функциянын маанилеринин көптүгү болсун.

2. T көптүгүндө аныкталган $g(t)$ функциясы үчүн $G(t)$ алгачкы функция жашасын, б.а.

$$\int g(t)dt = G(t)+C,\ C-const. \qquad (13.1.1)$$

Бул шарттар аткарылганда X көптүгүндө аныкталган $g[\varphi(x)]\varphi'(x)$ функциясы үчүн $G[\varphi(x)]$ алгачкы функция жашайт, б.а.

$$\int g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = G[\varphi(x)]+C. \qquad (13.1.2)$$

Д а л и л д ө ө. Татаал функцияны дифференциалдоо эрежесин колдонсок

$$\frac{d}{dx}\{G[\varphi(x)]+C\} = \frac{d}{dx}\{G[\varphi(x)]\} = G'[\varphi(x)]\varphi'(x) = g[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

Далилденген теореманын мааниси төмөндөгүдөй.

$$\int f(x)dx \qquad (13.1.3)$$

интегралын эсептөө талап кылынсын Айрым учурларда жаңы өзгөрүлмө катары дифференциалдануучу $t=\varphi(x)$ функциясын тандап алууга болот жана

$$f(x) = g[\varphi(x)]\varphi'(x) \qquad (13.1.4)$$

барабардыгы орун алат. Мында $g(t)$ функциясы жеңил эле интегралданат, б.а.

$$\int g(t)dt = G(t)+C$$

орун алат. (13.1.3) интегралы үчүн, теореманын негизинде

$$\int f(x)dx = \int g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = G[\varphi(x)]+C \qquad (13.1.5)$$

формуласын жазууга болот.

(13.1.3) интегралды мындай жол менен эсептөө, өзгөрүлмөнү алмаштыруу аркылуу интегралдоо деп аталат.

Белгилей кетүүчү нерсе аталган ыкты каалагандай эле интегралга колдоно бергенге болбойт. Жаңы өзгөрүлмөнү киргизүү эсептөөчүнүн жекече сапатынан да көз каранды.

М и с а л д а р. 1. $\int \sin 5x dx$. $t=5x$ дейли, анда $dt=5dx$. Демек

$$\int \sin 5x dx = \int \frac{1}{5}\sin t\, dt = -\frac{1}{5}\cos t + C = -\frac{1}{5}\cos 5x + C.$$

2. $\int \frac{dx}{x+a}$. $t = x+a$, $dt = dx$.

$$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+a| + C.$$

3. $\int e^{\cos x}\sin x dx$. $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$.

$$\int e^{\cos x}\sin x dx = \int (-e^t)dt = -e^t + C = -e^{\cos x} + C.$$

4. $\int \frac{\ln^n x}{x} dx$. $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x}dx$.

$$\int \frac{\ln^n x}{x} dx = \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{1}{n+1}\ln^{n+1} x + C.$$

5. $\int \frac{dx}{\cos x}$. Бул интегралда өзгөрүлмөнү алмаштыруу үчүн төмөндөгүдөй өзгөртүп түзүүнү аткаралы

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x dx}{1-\sin^2 x}.$$

$t = \sin x$ деп алалы, анда $dt = \cos x dx$. Демек

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

6. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{2}{3}}}$. $t = \arcsin\frac{x}{a}$ деп алсак, $x = a\sin t$, $dx = a\cos t dt$.

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{a^2} tgt + C = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} + C = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C.$$

13.2. Бөлүктөп интегралдоо

Т е о р е м а 74. 1. $u(x)$, $v(x)$ функциялары X көптүгүндө дифференциалдануучу болсун.

2. X көптүгүндө $v(x)\cdot u'(x)$ функциясынын баштапкы функциясы жашасын.

Бул шарттар аткарылганда $u(x)\cdot v'(x)$ функциясы үчүн X көптүгүндө баштапкы функция жашайт, төмөндөгү формула туура болот

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)dx . \qquad (13.2.1)$$

Д а л и л д ө ө. Шарт боюнча $u(x)$, $v(x)$ функциялары X көптүгүндө дифференциалдануучу болгондуктан

$$[u(x)\cdot v(x)]' = u(x)\cdot v'(x) + u'(x)\cdot v(x). \qquad (13.2.2)$$

(13.2.2) барабардыгын dx ке көбөйтөлү жана интегралдайлы

$$\int [u(x)\cdot v(x)]' dx = \int u(x)\cdot v'(x)dx + \int u'(x)\cdot v(x)dx .$$

Шарт боюнча $u(x)\cdot v'(x)$ функциясынын баштапкы функциясы жашагандыктан жана

$$\int [u(x)\cdot v(x)]' dx = u(x)\cdot v(x) + C ,$$

болгондуктан $\int u'(x)\cdot v(x)dx$ интегралы жашайт, (13.2.1) формула туура болот. Теорема далилденди.

$v'(x)dx = dv(x)$, $u'(x)dx = du(x)$ болоорун эске алсак (13.2.1) формуланы төмөндөгүдөй жазууга болот

$$\int udv = u\cdot v - \int vdu . \qquad (13.2.3)$$

(13.2.1), (13.2.3) формулалары интегралды эсептөөнүн бөлүктөп интегралдоо методу деп аталат. Бул метод боюнча $\int udv$ интегралы $\int vdu$ интегралын эсептөөгө келтирилет.

М и с а л д а р. 1. $\int x^n \ln xdx$. $u = \ln x$, $dv = x^n dx$, $du = \frac{1}{x}dx$, $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ болгондуктан

$$\int x^n \ln xdx = \frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}\cdot \ln x - \int \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{x}\cdot x^{n+1}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot \ln x - \frac{1}{(n+1)^2}\cdot x^{n+1} + C =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C .$$

2. $\int e^{ax}\cos bxdx$ интегралын эсептөө талап кылынсын.

$u = e^{ax}$, $dv = \cos bxdx$, $du = ae^{ax}dx$, $v = \frac{1}{b}\sin bx$ болгондуктан

$$\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx .$$

Барабардыктын оң жагындагы итегралды бөлүктөп интегралдоо методун колдонуу аркылуу эсептейли.

$$u = e^{ax},\ dv = \sin bxdx,\ du = ae^{ax}dx,\ v = -\frac{1}{b}\cos bx$$

$$\int e^{ax}\sin bxdx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx.$$

Демек

$$\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bxdx.$$

Мындан

$$\frac{a^2+b^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{b^2}\cdot e^{ax},$$

$$\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\cdot e^{ax} + C.$$

Бөлүктөп интегралдоо методу колдонулуучу интегралдардын класстарын төмөндөгүдөй үч группага бөлүүгө болоорун практика көрсөтөт:

I. Интеграл ичиндеги функциялардын бири, көбөйтүүчү катары, $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $(arctgx)^2$, $(\arccos x)^2$, $\ln\varphi(x)$, … түрдө болуп, экинчиси белгилүү функциянын туундусу болсо. Бул учурда $u(x)$ катары аталган функцияларды, $dv(x)$ деп экинчи функцияны алабыз.

II. Бул группага $\int (ax+b)^n\cos(cx)dx$, $\int (ax+b)^n\sin(cx)dx$, $\int (ax+b)^n e^{cx}dx$, $a,b,c\in R$, $n\in N$ көрүнүшүндөгү интегралдарды киргизүүгө болот.

$u(x) = (ax+b)^n$, $dv = e^{cx}dx$ ($\cos(cx), \sin(cx)$) деп алабыз жана бөлүктөп интегралдоо методун n ирет колдонобуз.

III. /чүнчү группага $\int e^{ax}\cos bxdx$, $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int \sin(\ln x)dx$, $\int \cos(\ln x)dx$, … көрүнүшүндөгү интегралдар кирет. Бул учурда берилген интегралды эсептөө үчүн бөлүктөп интегралдоо методун эки жолу колдонобуз.

Эскерте кетүүчү нерсе бөлүктөп интегралдоо методун колдонууга мүмкүн болгон интегралдардын классы жогоруда белгиленген үч группа менен чектелбейт. Буга мисал катары төмөндөгүдөй мисалдарды карайлы.

1. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$. Бул интеграл белгиленген топтун бирине да кирбейт.

$$u = x,\ dv = \frac{dx}{\sin^2 x},\ du = dx,\ v = -ctgx.$$

$$\int \frac{xdx}{\sin^2 x} = -xctgx + \int ctgxdx = -xctgx + \ln|\sin x| + C.$$

2. $I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}$, $a \in R$, $n \in N$. Интегралды эсептөөдөн мурда төмөндөгүдөй өзгөртүп түзүүлөрдү аткаралы

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2 dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2+a^2-t^2}{(t^2+a^2)^n}dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} -$$

$$-\frac{1}{2a^2}\int t\cdot\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{2a^2}\int t\cdot\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n}.$$

Акыркы интегралды эсептөө үчүн бөлүктөп интегралдоо методун колдонобуз. $u = t$, $dv = \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n}$, $du = dt$, $v = \frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{(t^2+a^2)^{n-1}}$ деп алсак

$$\int t\cdot\frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}}.$$

Демек

$$I_n = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{2a^2(1-n)}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2(1-n)}I_{n-1} =$$

$$= \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1},\ n = 2,3,\ldots.$$

Берилген интегралды эсептөө үчүн рекуренттик формулага ээ болдук.

$n = 1$ болгондо

$$I_1 = \int\frac{dt}{t^2+a^2} = \int\frac{dt}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{t}{a} + C.$$

14. Алгебралык көп мүчөлөр жана аларды көбөйтүүчүлөргө ажыратуу

14. 1. Комплекстик сандар жөнүндө түшүнүк

$x^2+1=0$, $x\in R$ теңдемеси берилсин. Бул теңдеменин чыныгы сандар көптүгүндөгү тамырларынын көптүгү $\varnothing$ көптүктү түзөт. Бул мисалдан көрүнгөндөй чыныгы сандардын көптүгүндө каалагандай эле алгебралык теңдеме тамырларга ээ боло бербейт. Чыныгы сандардын көптүгүн кеңейтүү зарылдыгы келип чыгат.

А н ы к т о о. $x^2+1=0$ теңдемесинин тамырын i деп белгилейли.

Аныктоо боюнча $i^2=-1$.

Каалагандай $a,b\in R$ чыныгы сандарды алалы.

А н ы к т о о. $\{a+ib,\ a,b\in R,\ i^2=-1\}$ көптүгүн комплекстик сандардын көптүгү деп атайбыз.

Бул көптүктү C тамгасы аркылуу белгилейли,

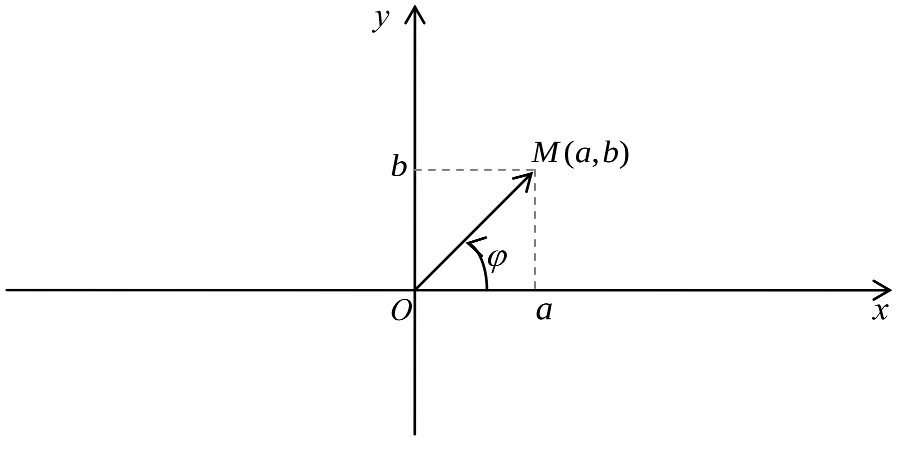
$$C=\{a+ib,\ a,b\in R,\ i^2=-1\}.$$

$(a+ib)$ жазуусу символдук мүнөзгө ээ. Бул жазууда «+» белгисин математикада колдонулуп жүргөн кошуу амалы менен чаташтырууга болбойт, ошондой эле ib туюнтмасы да бирдиктүү символ.

Комплекстик санды $z=a+ib$ түрүндө белгилөө кабыл алынган. a – комплекстик z санынын чыныгы, b – мнимый бөлүгү деп аталат.

$a=\operatorname{Re} z$, $b=\operatorname{Im} z$ түрүндө белгиленет.

Каалагандай z комплекстик санын тик бурчтуу координаталар системасында координаталары (a,b) болгон чекит түрүндө сүрөттөөгө болот ($\overrightarrow{OM}$ – вектору түрүндө да).



Пайда болгон (a,b) чекиттердин көптүгү R^2 мейкиндигинен айырмаланып комплекстик тегиздик деп аталат, C түрүндө эле белгиленет.

R^2 мейкиндиги C тегиздиги өз ара изоморфтуу. Демек C тегиздигинде орун алган касиеттер R^2 мейкиндиги үчүн да туура болот.

Комплекстик сандардын үстүнөн амалдар төмөндөгүдөй аныкталат.

А н ы к т о о. $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ болсо, анда

1. $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$.

2. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$.

А н ы к т о о. $z = a + ib$, $\bar{z} = a - ib$ комплекстик сандар өз ара түйүндөш комплекстик сандар деп аталышат.

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2.$$

А н ы к т о о. $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ болсо, анда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{a^2 + b^2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a^2 + b^2}.$$

А н ы к т о о. $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ болсо, анда $z_1 = z_2$ деп аталат.

А н ы к т о о. $0 + i \cdot 0$ саны нөль комплекстик сан деп аталат.

Жогоруда аныкталган кошуу жана көбөйтүү амалдары төмөндөгүдөй касиеттерге ээ болот:

1^0. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

2^0. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

3^0. $z + 0 = z$.

4^0. $z + z' = 0$ боло турган z' жашайт.

5^0. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

6^0. $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

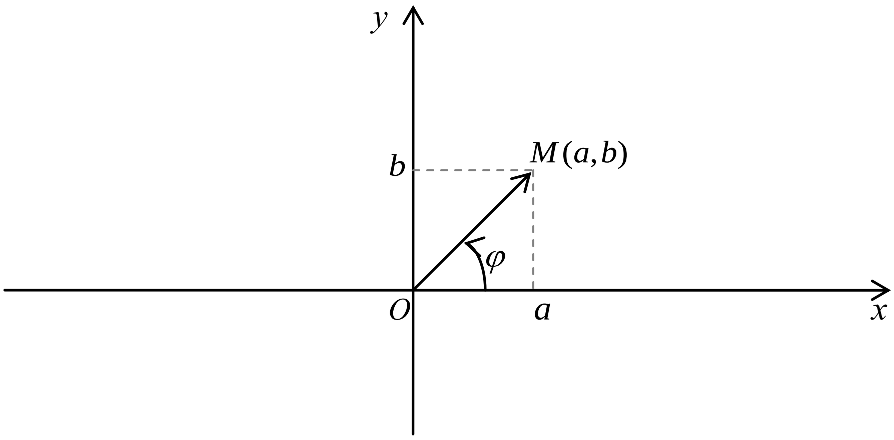
7^0. $z \cdot 1 = z$.

8^0. $z \cdot z'' = 1$ боло тургандай z'' саны жашайт.

9^0. $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$.

14. 2. Комплекстик сандардын геометриялык мааниси жана анын башка формаларда жазылышы

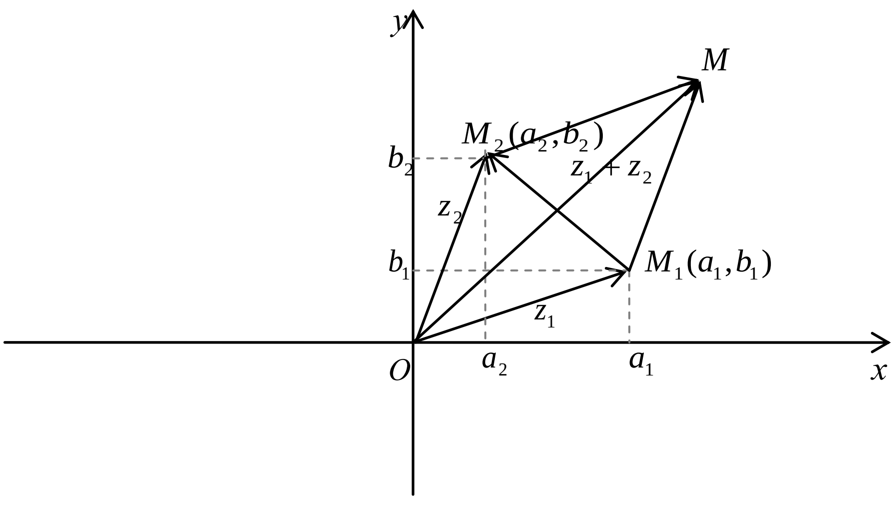
$z = a + ib$ комплекстик саны берилсин. Жогоруда комплекстик санды тик бурчтуу координаталар системасында (a,b) чекити же $\overrightarrow{OM}$ вектору түрүндө сүрөттөөгө мүмкүн экендиги белгиленген.



$\overrightarrow{OM}$ векторунун чыныгы ок (Ox) менен түзгөн бурчун φ деп белгилейли.

$z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ комплекстик сандары берилсин. Бул сандар координаталык тегиздикте $\overrightarrow{OM}_1$, $\overrightarrow{OM}_2$ векторлорун аныкташат.

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$ болгондуктан, комплекстик сандардын суммасы да комплекстик санды жана бул сан кандайдыр бир векторду аныктайт. Бул вектор $\overrightarrow{OM}_1$, $\overrightarrow{OM}_2$ векторлорунун суммасы катары сүрөттөлөт.



Чиймеде бул вектор $\overrightarrow{OM}$ түрүндө сүрөттөлгөн.

$(z_1 - z_2)$ – комплекстик сандардын айырмасы ушундай эле жол менен аныкталат. Чиймеде бул вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$.

ΔOM_2M карайлы. /ч бурчтуктун каалагандай бир жагынын узундугу калган эки жагынын узундуктарынын суммасынан кичине жана алардын узундуктарынын айырмасынан чоң болоорун эске алсак төмөндөгүдөй барабарсыздыктар туура болот.

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

ΔOMA ны карайлы. Бул үч бурчтуктан $\overrightarrow{OM}$ нун узундугун аныктайлы, $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Алынган сан z комплекстик санынын модулу деп аталат, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ түрдө белгиленет.

Ушул эле үч бурчтуктан $a = |z|\cos\varphi,\ b = |z|\sin\varphi$ болоору келип чыгат. Демек

$$z = a + ib = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Комплекстик сандын бул жазылышы тригонометриялык форма деп аталат.

φ – чоңдугу z санынын аргументи деп аталат.

Эйлердин

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},\ \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

формулаларын эске алсак

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

жазылышына ээ болобуз. Бул комплекстик сандын көрсөткүчтүү формасы деп аталат.

$z = a + ib$ – алгебралык форма деп аталат.

14. 3. Алгебралык көп мүчө жана анын тамырлары

А н ы к т о о. $f(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + ... + c_1 z + c_0,\ c_k \in C$ туюнтмасы n – даражалык (алгебралык) көп мүчө деп аталат.

$z = x + iy$ – комплекстик өзгөрүлмө.

А н ы к т о о. $f(a) = 0$ болсо, анда a – комплекстик саны $f(z)$ көп мүчөсү-нүн тамыры деп аталат.

Т е о р е м а 75. $f(z)$ алгебралык көп мүчөсүнүн n тамыры жашайт жана

$$f(z)=c_n(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(z-z_m)^{k_m} \qquad (14.3.1)$$

ажыралмасы туура болот.

(14.3.1) ажыралмасында $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$, k_j – саны z_j – тамырынын эссеси деп аталат.

Бул теорема алгебра курсунда далилденет.

$$f(x)=c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_1x+c_0,\ c_k\in R\ \ (k=\overline{0,n})$$

чыныгы коэффициентүү алгебралык көп мүчө болсун.

Т е о р е м а 76. a комплекстик саны $f(x)$ тин m эселүү тамыры болсо, анда $\overline{a}$ саны да $f(x)$ тин m эселүү тамыры болот.

Теорема 75 тин негизинде $f(x)$ көп мүчөсүн төмөндөгүдөй жазууга болот

$$f(x)=c_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{k_m}. \qquad (14.3.2)$$

Теорема 76 ны эске алып (14.3.2) ажыралмасында комплекстик түйүндөш тамырларга туура келген көбөйтүүчүлөрдү топтоштуралы.

Мисалга x_1 жана x_2 түйүндөш тамырлар болсун, б.а. $k_1=k_2$, $x_1=a+ib$, $x_2=a-ib$. Демек

$$(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}=\left[(x-x_1)(x-\overline{x}_1)\right]^{k_1}=\left[(x-a-ib)(x-a+ib)\right]^{k_1}=\left[(x-a)^2+b^2\right]^{k_1}.$$

Комплекстик түйүндөш тамырларга тиешелеш болгон көбөйтүүчүлөрдү бириктирүүнүн натыйжасында (14.3.2) ажыралмасын төмөндөгүдөй түрдө көрсө-түүгө болот.

$$f(x)=c_n(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_j)^{m_j}\cdot\left[(x-a_1)^2+b_1^{\,2}\right]^{k_1}\times$$

$$\times\left[(x-a_2)^2+b_2^{\,2}\right]^{k_2}\cdot\ldots\cdot\left[(x-a_l)^2+b_l^{\,2}\right]^{k_l}. \qquad (14.3.3)$$

(14.3.3) тө $m_1+m_2+\ldots+m_j+k_1+k_2+\ldots+k_l=n$, $\alpha_n,a_k,b_k\in R\ \ (n=\overline{1,j};\ k=\overline{1,l})$.

Кийинки биздин колдонуубузда $f(x)$ чыныгы коэффициентүү алгебралык көп мүчөсүндө x чыныгы өзгөрүлмө деп эсептейбиз.

14. 4. Туура рационалдык бөлчөктү жөнөкөй бөлчөктөрдүн суммасына ажыратуу

$P(x)$ – n, $Q(x)$ – m даражалык чыныгы коэффициентүү алгебралык көп мүчөлөр болушсун.

А н ы к т о о. $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – рационалдык бөлчөк деп аталат.

А н ы к т о о. $n < m$ болсо, анда бөлчөк туура; $n \geq m$ болсо, анда туура эмес деп аталат.

Т е о р е м а 77. $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – туура эмес бөлчөктү, кандайдыр бир көп мүчөнүн жана туура бөлчөктүн суммасы түрүндө көрсөтүүгө болот, б.а.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}, \qquad (14.4.1)$$

мында $P_1(x)$ – n_1-даражадагы, $P_2(x)$ – n_2-даражадагы, $Q(x)$ – m-даражадагы көп мүчө жана $n_1 + m = n$.

(14.4.1) ажыралмасын алуу үчүн $P(x)$ көп мүчөсүн $Q(x)$ ке мамыча эрежеси боюнча бөлүү жетиштүү.

Т е о р е м а 78. 1. $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – туура бөлчөгү берилсин.

2. $f(x) = c_n(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_j)^{m_j} \cdot \left[(x-a_1)^2 + b_1^2\right]^{k_1} \cdot \left[(x-a_2)^2 + b_2^2\right]^{k_2} \times$ $\times \ldots \cdot \left[(x-a_l)^2 + b_l^2\right]^{k_l}$ болсун.

Бул шарттар аткарылганда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}} + \frac{A_{21}}{x-\alpha_2} + \frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2m_2}}{(x-\alpha_2)^{m_2}} + \ldots +$$

$$+ \frac{A_{j1}}{x-\alpha_j} + \frac{A_{j2}}{(x-\alpha_j)^2} + \ldots + \frac{A_{jm_j}}{(x-\alpha_j)^{m_j}} + \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x-a_1)^2 + b_1^2} + \ldots + \frac{B_{1k_1}x + C_{1k_1}}{\left[(x-a_1)^2 + b_1^2\right]^{k_1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{B_{l1}x + C_{l1}}{(x-a_l)^2 + b_l^2} + \ldots + \frac{B_{lk_l}x + C_{lk_l}}{\left[(x-a_l)^2 + b_l^2\right]^{k_l}} \qquad (14.4.2)$$

ажыралмасы орун алат.

(14.4.2) ажыралмасындагы A_{mm_p} $(m=\overline{1,j};\ m_p=\overline{m_1,m_j})$, B_{mm_p} , C_{mm_p} $(m=\overline{1,l};\ m_p=\overline{k_1,k_l})$ белгисиз коэффициенттер, бул ажыралманы жалпы бөлүмгө келтирүү жана көп мүчөлөрдү барабарлоо жолу менен табылат.

(14.4.2) ажыралмасындагы бөлчөктөр жөнөкөй бөлчөктөр деп аталат.

Теорема 78 ди колдонууга мисалдар карайлы.

М и с а л. 1. $\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$ туура бөлчөгүн жөнөкөй бөлчөктөргө ажыраткыла.

Каралып жаткан бөлчөк туура бөлчөк болгондуктан Теорема 78 ди колдонуп ажыраталы ((x^2+x+1) – үч мүчө чыныгы тамырларга ээ эмес).

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

Оң жактагы бөлчөктү жалпы бөлүмгө келтирели

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{B_1(x^3-1)+B_2(x^2+x+1)+(Mx+N)(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

Эки бөлчөктүн алымындагы көп мүчөлөрдү салыштырып төмөндөгүдөй системага ээ болобуз.

$$\begin{cases} B_1+M=2, \\ B_2+N-2M=4, \\ B_2+M-2N=1, \\ B_1+B_2+N=2. \end{cases}$$

Бул системанын чечими $B_1=2$, $B_2=3$, $M=0$, $N=1$. Жыйынтыкта

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2+x+1}$$

15. Рационалдык бөлчөктөрдү интегралдоо

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ – рационалдык бөлчөк берилсин. Бул бөлчөктү интегралдоо маселесин коелу. Теорема 77 нин негизинде бул бөлчөк кандайдыр бир көп мүчөнүн жана туура бөлчөктүн суммасы түрүндө көрсөтүүгө мүмкүн экендиги белгилүү (14.4.1). Демек $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ти интегралдоо маселеси көп мүчөнү жана туура бөлчөктү интегралдоого келтирилет.

Көп мүчөнү интегралдоо $a_n x^n$ бир мүчөнү же x^n даражалык функцияны интегралдоо менен тең күчтө.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

б.а. көп мүчөнү интегралдоодо даражасы бирге чоң болгон көп мүчө келип чыгат.

Туура бөлчөктү интегралдоо Теорема 78 дин негизинде

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Bx+C}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^n}$$

көрүнүшүндөгү жөөкөй бөлчөктөрдү интегралдоого келтирилет.

15.1. $\frac{A}{(x-a)^k}$ бөлчөгүн интегралдоо

Бул бөлчөк түздөн-түз интегралданат.

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A\int (x-a)^{-k} dx = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

15.2. $\frac{Bx+C}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^n}$ бөлчөгүн интегралдоо

$n=1$ учур. $\int \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2} dx$. Бул интегралды эсептөө үчүн $x-a=t$ дейли, анда $dx=dt$.

$$\int \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2} dx = \int \frac{Bt+Ba+C}{t^2+b^2} dt = B \cdot \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+b^2)}{t^2+b^2} + (Ba+C)\int \frac{dt}{t^2+b^2} =$$

$$= \frac{B}{2}\ln(t^2+b^2) + \frac{Ba+C}{b}\int \frac{d\left(\frac{t}{b}\right)}{1+\left(\frac{t}{b}\right)^2} dt = \frac{B}{2}\ln(t^2+b^2) + \frac{Ba+C}{b} arctg\frac{t}{b} + C_1 =$$

$$= \frac{B}{2}\ln\left[(x-a)^2+b^2\right] + \frac{Ba+C}{b} arctg\frac{x-a}{b} + C_1.$$

$n \geq 2$ учур. $\int \frac{Bx+C}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^n} dx$. $x-a=t$ дейли, анда $dx=dt$.

$$\int \frac{Bx+C}{\left[(x-a)^2+b^2\right]^n}dx = \int \frac{Bt+Ba+C}{(t^2+b^2)^n}dt = \frac{B}{2}\int \frac{d(t^2+b^2)}{(t^2+b^2)^n} + (Ba+C)\int \frac{dt}{(t^2+b^2)^n} =$$

$$= \frac{B}{2}\cdot\frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{(t^2+b^2)^{n-1}} + (Ba+C)\int \frac{dt}{(t^2+b^2)^n}\ .$$

Бул учурда берилген интегралды эсептөө $\int \frac{dt}{(t^2+b^2)^n}$ интегралды эсептөөгө келтирилди. Бөлүктөп интегралдоо методу темасында бул интегралды эсептөөнүн төмөндөгүдөй рекуренттик формуласы алынган

$$I_n = \frac{t}{2b^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2b^2(n-1)}I_{n-1},\ n = 2,3,\ldots .$$

Жогоруда айтылгандардын, далилденгендердин негизинде төмөндөгүдөй жыйынтык чыгарууга болот.

Ж ы й ы н т ы к. Каалагандай рационалдык бөлчөктү элементардык функцияларда интегралдоого болот.

М и с а л. $\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$ бөлчөгүн интегралдоо маселеси коелу.

Далилденгендей бул бөлчөктү жөнөкөй бөлчөктөрдүн суммасы түрүндө көрсөтүүгөболот.

$$\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx = 2\int \frac{1}{x-1}dx + 3\int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{1}{x^2+x+1}dx =$$

$$= 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\,.$$

16. Айрым тригонометриялык жана иррационалдык туюнтмаларды интегралдоо

16.1. $R(\sin x, \cos x)$ көрүнүшүндөгү функция берилсин. $R(\sin x, \cos x)$ эки өгөрүлмөлүү рационалдык функция.

$$P_n(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots + a_{0n}y^n$$

көрүнүшүндөгү функцияны x жана y өзгөрүлмөлөрүнөн көп мүчө деп атайбыз.

x жана y өзгөрүлмөлөрүнөн рационалдык функция деп $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ көрүнүшүндөгү туюнтманы айтабыз.

$t = tg\frac{x}{2}$ ордуна коюуну аткаралы.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ x = 2arctgt,\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Демек

$$R(\sin x, \cos x) = R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right).$$

Акыркы алынган туюнтма t га карата рационалдык функция болот. Себеби бул функцияда көбөйтүү, кошуу, кемитүү, бөлүү амалдары гана катышкандыктан, бул амалдарды $\frac{2t}{1+t^2}$, $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ туюнтмаларынын үстүнөн аткаруудан функциянын рационалдуулугу бузулбайт.

16.2. $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ туюнтмасы берилсин.

Бул туюнтма $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ордуна коюусу аркылуу рационалдык функцияга келтирилет.

Чындыгында

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d},\ x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n},\ dx = \frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt.$$

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, t\right)\cdot\frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt.$$

16.3. $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$.

(ax^2+bx+c) – квадраттык үч мүчө эселүү тамырга ээ болбосун. Төмөндөгүдөй учурларды карайлы.

16.3.1. (ax^2+bx+c) – квадраттык үч мүчө комплекстик тамырларга ээ болсун. Бул учурда үч мүчөнүн белгиси a санынын белгиси менен аныкталат. Квадраттык үч мүчөдөн квадраттык тамыр чыгарылып жаткандыктан $a>0$.

$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}$ болсун. Мындан

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\ dx=2\cdot\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{\left(2\sqrt{a}t+b\right)^2}dt,\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}.$$

Демек

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}\right)\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{\left(2\sqrt{a}t+b\right)^2}dt.$$

Каралган учур Эйлерди биринчи oордуна коюусу деп аталат.

16.3.2. (ax^2+bx+c) – үч мүчө чыныгы x_1, x_2 тамырларга ээ болсун, б.а. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$ дейли, анда $a(x-x_2)=t^2(x-x_1)$,

$$x=\frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a},\ \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(x_1-x_2)}{t^2-a}\cdot t,\ dx=\frac{2a(x_1-x_2)t}{(t^2-a)^2}dt.$$

Бул учурда

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(\frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a},\frac{a(x_1-x_2)t}{t^2-a}\right)\cdot\frac{2a(x_1-x_2)t}{(t^2-a)^2}dt$$

рационалдык туюнтманы интегралдоого келтирилди.

16.3.2 – учуру Эйлердин экинчи oордуна коюусу деп аталат.

17. Эллиптикалык интегралдар

Биз жогоруда элементардык функциялар аркылуу туюнтууга, б.а. элементардык функцияларда интегралдоого мүмкүн болгон функцияларды карадык.

Каалагандай эле туюнтманын интегралын элементардык функциялар аркылуу туюнтууга мүмкүн болбойт.

Айтылганга мисал катары

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}\right)dx, \qquad (17.1)$$

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}\right)dx \qquad (17.2)$$

интегралдарын кароого болот. Бул интегралдар айрым учурларда эле элементардык функциялар аркылуу туюнтулбаса жалпы учурда (17.1), (17.2) интегралдарды элементардык функциялар аркылуу туюнтууга болбойт.

Төмөндөгүлөрдү далилдөөсүз кабыл алалы:

1) (17.1) интегралы (17.2) түргө келтирилет.

2) (17.2) интегралы өзгөртүп түзүүлөрдүн натыйжасында төмөндөгү интегралдардын бирине келет.

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\ \int \frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},\ \int \frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (0<k<1). \quad (17.3)$$

(17.3) интегралдары 1 – 2 – 3 – түрдөгү эллиптикалык интегралдар деп аталышат.

Ж. Лиувилль көрсөткөндөй бул интегралдардын ар бири элементардык эмес функциялар болуп эсептелет.

Элементардык эмес интегралдарга төмөндөгүлөр да кирет:

1. $\int \frac{\sin x}{x}dx$.

2. $\int \frac{\cos x}{x}dx$.

3. $\int e^{x^2}dx$.

4. $\int \sin x^2 dx$.

5. $\int \cos x^2 dx$.